

Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :
 $\sum_{n=0}^N u_n$ est une somme partielle, avec N fixé ; $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série convergente de terme général u_n ;
 Enfin $\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n dont on ne connaît pas forcément la nature ;
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ converge, il suffit de comparer $|u_n|$ au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ diverge, il suffit de savoir que u_n ne tend pas vers 0 (grosière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles (S_N) indépendamment de N par une même constante.

I. Exemples usuels

Exercice 1 ☆

Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge, en comparant son terme général à $\frac{1}{n}$.

Exercice 2 ☆

Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge, en comparant son terme général à $\frac{1}{n^{3/2}}$.

II. Applications directes du cours

Exercice 3 ☆ « Série géométrique »

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0} = (a^n)_{n \geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^N a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 ☆ « Série télescopique »

Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$,

où $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

On pourra remarquer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.

Exercice 5 ☆ « Série exponentielle »

Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{(i\pi)^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6 ☆ « Comparaison de séries »

Sachant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, quelle est la nature de

la série :

$$\sum v_n, \text{ pour } v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} ?$$

$$\sum w_n, \text{ pour } w_n = \frac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ est multiple de } 3, w_n = 0 \text{ sinon ?}$$

III. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆☆

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $a_n = \frac{n}{n^2 + n^3}$ b) $b_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
 c) $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ d) $d_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 8 ☆☆

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $x_n = \frac{2^n}{3^n}$ b) $y_n = \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$
 c) $z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ d) $t_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ (avec $n \geq 2$)

Exercice 9 ☆☆ « Critère spécial »

Prouver que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N , pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

en déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Comment ferait-on en Python pour calculer cette valeur approchée ?

IV. Exercices

Exercice 10 ☆☆☆ Mines-Telecom 2017

Pour $\alpha > 0$ fixé, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 11 ☆☆☆ « reste d'une série convergente »

Soit $\alpha > 1$ fixé. Justifier que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

En déduire un équivalent simple à $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 12 ☆☆☆ « sommes partielles d'une série divergente »

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

- $u_n = 1/n^\alpha$, ($0 < \alpha < 1$);
- $u_n = \ln n/n$

Exercice 13 ☆☆☆

Déterminer, selon les valeurs du réel α la nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 + (-1)^n n^{-\alpha})$.

V. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆☆☆ « Série de Bertrand »

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, de paramètres réels α et β , converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 \in]0, 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

- Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que lon précisera.
- Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
- Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{2^n}$

Exercice 16 ☆☆☆ CCP PSI 2016

On définit la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ par : $u_k = \frac{1}{1+k^2}$.

- Etablir la convergence de la série de terme général u_k .

$$\text{On note pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

- Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge.

Exercice 17 ☆☆☆

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer la série $\sum u_n$ a même nature que les séries :

- Montrer la série $\sum u_n$ a même nature que la série : $\sum \ln(1 + u_n)$;
- Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge
indic. : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes partielles, ou bien l'inégalité
 $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Exercice 18 ☆☆☆

Soit (a_n) une suite décroissante de termes positifs telle que $\sum a_n$ converge.

- En justifiant, démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq na_n \leq 2(S_n - S_{[n/2]})$.
- En déduire que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- En déduire que la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$ converge.

Exercice 19 ★★★

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; démontrer que pour

tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$, en déduire que $s_n \sim \ln n$ quand n tend vers $+\infty$;

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = s_n - \ln n$, démontrer que (u_n) est une suite décroissante convergente de limite notée γ , prouver que $s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$;

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, démontrer que

$\sigma_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$, et que (σ_n) est une suite convergente et calculer sa limite; retrouver ce résultat en remarquant que $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$;

Exercice 20 ★★★

Soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite (u_n) .

2. En déduire une expression de u_n en fonction de n ;

3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux u_n , $(-1)^n u_n$, u_n/n
(on pourra étudier la suite définie par : $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$)

4. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$

Exercice 21 ★★★

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $\ln x = x - n$, a une solution unique dans $[1, +\infty[$ notée x_n , étudier la nature de $\sum (x_n)^\alpha$, pour α réel.

Exercice 22 ★★★

Discuter selon la valeur des paramètres réels α, β la nature des séries suivantes de terme général :

- a) $a_n = \alpha \sqrt{n}$ b) $b_n = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\beta}$
c) $c_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ d) $d_n = (1+n^\alpha)^\beta$

Exercice 23 ★★★★★

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$ où λ est réel et $\sum v_n$ est une série absolument convergente

1. Pour tout n , on pose $w_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) + \frac{\lambda}{n}$. Prouver que $\sum w_n$ est une série absolument convergente.

2. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\lambda}$, pour un réel $A > 0$.

3. Etudier $\sum \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \right)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 24 ★★★

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes, démontrer que les séries de terme général $a_n = \sqrt{u_n v_n}$ et $b_n = \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ sont convergentes.

Exercice 25 ★★★ Mines-Ponts : série divergente

Donner un équivalent de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 26 ★★★ « Mines-Ponts »

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 27 ☆☆☆ « Mines-Ponts »

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \geq 1$,

$$v_n = \left(n + \left((n-1) + \left(\dots + \left(2 + 1^{\frac{1}{4}} \right) \dots \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Donner la limite de la suite (v_n) .

Montrer que $v_n = O(n^{\frac{1}{4}})$.

Exercice 28 ☆☆☆ « Mines-Ponts »

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}.$$

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 29 ☆☆☆☆ CCP MP 2017

On définit la suite (u_n) par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a et b sont des réels strictement positifs. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et calculer sa somme en cas de convergence.

Indication : Étudier la suite (v_n) définie par : $v_n = (n+b-1)u_n$

Exercice 30 ☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \text{ et } v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. On notera ℓ la somme de cette série.
2. A l'aide d'un encadrement par des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, montrer que $\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{\sin t}{t} dt = \ell$. Commentaire.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $|\sin t| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. En déduire une minoration de v_k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. Donner la nature de la série $\sum_{k \geq 0} v_k$. Commentaire.

VI. Formule de Stirling

Exercice 31 ☆☆☆ à savoir refaire

1. *Equivalent de sommes partielles de séries positives divergentes*

(a) Soient $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante et telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Justifier que pour tout $N \geq 1$, $\sum_{k=1}^N f(k+1) \leq \int_1^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^N f(k)$.

(b) En déduire que $S_N = \sum_{k=1}^N f(k)$ est équivalent en $+\infty$ à $\int_1^{N+1} f(t) dt$.

(c) En déduire que $s_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ est équivalent en $+\infty$ à $\ln(N)$.

(d) Le résultat du (b) est-il encore valable pour f croissante ?

2. *Développement limité de $\ln(n!)$*

(a) Démontrer que $\ln(n!) = n \ln(n) + O(n)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{O(n)}$

(b) En posant $u_n = \ln(n!) - n \ln(n)$ et en calculant $u_N - u_1 = \sum_{k=1}^{N-1} u_{k+1} - u_k$, vérifier que $u_N \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -N$.

En déduire que $\ln(n!) = n \ln n - n + o(n)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{o(n)}$

(c) En posant $v_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n$ et en calculant $v_N - v_1 = \sum_{k=1}^{N-1} v_{k+1} - v_k$, vérifier que $v_N \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln N}{2}$.

En déduire que $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + o(\ln n)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{o(\ln n)}$

(d) En posant $w_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{\ln n}{2}$ et en calculant $w_N - w_1 = \sum_{k=1}^{N-1} w_{k+1} - w_k$, vérifier que w_N admet une limite finie ℓ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

(e) En posant $K = e^\ell$, montrer que $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \ell + o(1)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$

3. *Intégrales de Wallis* On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

(a) Calculer W_0 et W_1 . Pour $k \geq 2$, établir une relation entre W_k et W_{k-2} .

(b) En déduire les formules $W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

(c) Justifier que la suite (W_n) est décroissante et positive, et pour tout $n \geq 0$, $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$, puis que $\lim \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

(d) En déduire la formule $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(e) En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$

Notes

³ correction : pour $a \neq 1$, $S_N = \frac{a^0 - a^{N+1}}{1 - a}$. il y a convergence ssi $a^{N+1} \rightarrow 0$ c'est à dire ssi $|a| < 1$, vers $\frac{1}{1 - a}$.

¹⁵ correction :

1. $\ell = 0$

2. apcr, $u_{n+1} \leq \frac{1+1/2}{2}u_n$ et majoration par $O((3/4)^n)$

3. $\sum \ln(1 + u_k)$ CV, car a même nature que $\sum u_k$, on a donc $u_n = \frac{u_0}{2^n} \times \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$; $K = \lim_n u_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$

²⁵ correction : équivalent à $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln 2)$

²⁶ correction : $|u_{n+1}| \rightarrow 0$, par DL2, $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

²⁷ correction : diverge car $v_n^4 \geq n$, par réc $v_n^l e(2n)^{1/4}$ car $(2x+2)^{1/4} \leq x$ pour $x \geq 2$

²⁸ correction : $|u_{n+1}| \rightarrow 0$, par DL2, $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

²⁹ correction : $v_{n+1} - v_n = (a + b - 1)u_n$.

Cas $a + b - 1 = 0$: $u_n = \frac{n - b + 1}{n}$

Cas $a + b - 1 \neq 0$ $\sum u_n$ CV ssi $\sum (v_{k+1} - v_k)$ CV ssi (V_N) CV vers une limite L , auquel cas $u_n \sim L/n$. Si $L \neq 0$ DV. Si $L = 0$, $u_n = o(1)/n$

³¹ correction : 1)d) :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \leq I_n = \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k+1)$$

donc $f(1) + S_n \leq f(1) - f(n+1) + S_n \leq S_n \leq I_n$

et $I_n \rightarrow +\infty$ permet de conclure.