

Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :
 $\sum_{n=0}^N u_n$ est une somme partielle, avec N fixé ; $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série convergente de terme général u_n ;
 Enfin $\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n dont on ne connaît pas forcément la nature ;
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ converge, il suffit de comparer $|u_n|$ au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ diverge, il suffit de savoir que u_n ne tend pas vers 0 (grosière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles (S_N) indépendamment de N par une même constante.

I. Calculs de sommes de séries convergentes

Exercice 1 ☆ « Série géométrique »

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0} = (a^n)_{n \geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^N a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$ et expression de la somme en cas de convergence.

Exercice 2 ☆ « Série télescopique »

Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$,

où $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et donner la valeur de sa somme.

On pourra remarquer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.

II. Nature d'une série

Exercice 3 ☆ « Comparaison de séries »

Sachant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, quelle est la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} v_n, \text{ pour } v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} ?$$

$$\sum_{n \geq 1} w_n, \text{ pour } w_n = \frac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ est multiple de } 3, w_n = 0 \text{ sinon ?}$$

Exercice 4 ☆☆☆

Discuter selon la valeur des paramètres réels α, β la nature des séries suivantes de terme général :

$$\text{a) } a_n = \alpha^{\sqrt{n}} \quad \text{b) } b_n = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\beta}$$

$$\text{c) } c_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta} \quad \text{d) } d_n = (1+n^\alpha)^\beta$$

III. Séries et intégrales

Exercice 5 ☆☆☆ « Sommes partielles d'une série divergente »

1. Calculer $\int_1^M \frac{1}{t} dt$, pour $M \geq 1$ entier.
2. Pour $k \geq 2$, encadrer $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ en utilisant la décroissance sur $[k, k+1]$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$.
3. En déduire qu'un équivalent de $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ est $\ln N$.

Exercice 6 ☆☆☆ « sommes partielles d'une série divergente »

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, ($0 < \alpha < 1$) ;
2. $u_n = \ln n/n$

IV. Séries alternées

Exercice 7 ☆☆☆ « Critère spécial »

Prouver que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N , pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

en déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Comment ferait-on en Python pour calculer cette valeur approchée ?

Exercice 8 ☆☆☆

Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $\forall n \geq 1$, $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

V. Pour aller plus loin

Exercice 9 ☆☆☆ « HP : Série de "Bertrand" »

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, de paramètres réels α et β , converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 10 ☆☆☆ « Mines-Ponts »

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}.$$

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 11 ☆☆☆ Mines-Ponts PC

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 \in]0, 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on précisera.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{2^n}$

Exercice 12 ☆☆☆

$$\text{Soit } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite (u_n) .
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n ;
3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux u_n , $(-1)^n u_n$, u_n/n
(on pourra étudier la suite définie par :
 $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$)
4. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$

VI. Formule de Stirling

Exercice 13 ☆☆☆ à savoir refaire

1. *Équivalent de sommes partielles de séries positives divergentes*

(a) Soient $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante et telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Justifier que pour tout $N \geq 1$, $\sum_{k=1}^N f(k+1) \leq \int_1^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^N f(k)$.

(b) En déduire que $S_N = \sum_{k=1}^N f(k)$ est équivalent en $+\infty$ à $\int_1^{N+1} f(t) dt$.

(c) En déduire que $s_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ est équivalent en $+\infty$ à $\ln(N)$.

(d) Le résultat du (b) est-il encore valable pour f croissante ?

2. *Développement limité de $\ln(n!)$*

(a) Démontrer que $\ln(n!) = n \ln(n) + O(n)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{O(n)}$

(b) En posant $u_n = \ln(n!) - n \ln(n)$ et en calculant $u_N - u_1 = \sum_{k=1}^{N-1} u_{k+1} - u_k$, vérifier que $u_N \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -N$.

En déduire que $\ln(n!) = n \ln n - n + o(n)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{o(n)}$

(c) En posant $v_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n$ et en calculant $v_N - v_1 = \sum_{k=1}^{N-1} v_{k+1} - v_k$, vérifier que $v_N \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln N}{2}$.

En déduire que $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + o(\ln n)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{o(\ln n)}$

(d) En posant $w_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{\ln n}{2}$ et en calculant $w_N - w_1 = \sum_{k=1}^{N-1} w_{k+1} - w_k$, vérifier que w_N admet une limite finie ℓ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

(e) En posant $K = e^\ell$, montrer que $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \ell + o(1)$, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$

3. *Intégrales de Wallis* On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

(a) Calculer W_0 et W_1 . Pour $k \geq 2$, établir une relation entre W_k et W_{k-2} .

(b) En déduire les formules $W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$ et $W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$.

(c) Justifier que la suite (W_n) est décroissante et positive, et pour tout $n \geq 0$, $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$, puis que $\lim \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

(d) En déduire la formule $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(e) En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$

Notes

¹ correction :

pour $a \neq 1$, $S_N = \frac{a^0 - a^{N+1}}{1 - a}$, il y a convergence ssi $a^{N+1} \rightarrow 0$ c'est à dire ssi $|a| < 1$, vers $\frac{1}{1 - a}$.

⁸ correction : Considerer un D.l. $u_n = 1 + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8} \frac{1}{n} + r_n$, avec $r_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(n^{-3/2})$ terme général d'une série convergente, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV par critère spécial, et $\sum \frac{1}{n}$ DV.

¹⁰ correction : $|u_{n+1}| \rightarrow 0$, par DL2, $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

¹¹ correction :

1. $\ell = 0$

2. apcr, $u_{n+1} \leq \frac{1+1/2}{2} u_n$ et majoration par $O((3/4)^n)$

3. $\sum \ln(1 + u_k)$ CV, car a même nature que $\sum u_k$, on a donc $u_n = \frac{u_0}{2^n} \times \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$; $K = \lim_n u_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$

¹² correction :

$$u_n = \frac{3n-1}{3n} u_n - 1 \text{ par IPP}$$

$$u_0 = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$$

¹³ correction : 1)d) :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \leq I_n = \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k+1)$$

donc $f(1) + S_n \leq f(1) - f(n+1) + S_n \leq S_n \leq I_n$

et $I_n \rightarrow +\infty$ permet de conclure.