Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :
$\sum_{n=0}^{N} u_n$ est une somme partielle, avec N fixé ; $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série convergente de terme général u_n ;
Enfin $\sum_{n\geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n dont on ne connaît pas forcément la nature ;
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ converge, il suffit de comparer $|u_n|$ au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ diverge, il suffit de savoir que u_n ne tend pas vers 0 (grossière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles (S_N) indépendamment de N par une même constante.

I. Exemples usuels

Exercice 1 ✰

Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge, en comparant son terme général à $\frac{1}{n}$.

Exercice 2 ✰

Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge, en comparant son terme général à $\frac{1}{n^{3/2}}$.

II. Applications directes du cours

Exercice 3 ✰ *« Série géométrique »*

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geq 0} = (a^n)_{n\geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^{N} a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 ✰ *« Série télescopique »*

Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

On pourra remarquer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.

Exercice 5 ✰ *« Série exponentielle »*

Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{(\mathrm{i}\pi)^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6 ✰ *« Comparaison de séries »*

Sachant que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, quelle est la nature de la série :

$\sum v_n$, pour $v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$?

$\sum w_n$, pour $w_n = \frac{1}{n^2}$ si n est multiple de 3, $w_n = 0$ sinon ?

III. A savoir rédiger

Exercice 7 ✰✰

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $a_n = \frac{n}{n^2+n^3}$ b) $b_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

c) $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ d) $d_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 8 ✰✰

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $x_n = \frac{2^n}{3^n}$ b) $y_n = \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$

c) $z_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ d) $t_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ (avec $n \geq 2$)

Exercice 9 ✰✰ *« Critère spécial »*

Prouver que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N, pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

en déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
Comment ferait-on en Python pour calculer cette valeur approchée ?

IV. Exercices

Exercice 10 ☆☆ *Mines-Telecom 2017*

Pour $\alpha > 0$ fixé, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 11 ☆☆ *« reste d'une série convergente »*

Soit $\alpha > 1$ fixé. Justifier que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

En déduire un équivalent simple à $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 12 ☆☆ *« sommes partielles d'une série divergente »*

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$;
2. $u_n = \ln n / n$

Exercice 13 ☆☆☆

Déterminer, selon les valeurs du réel α la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + (-1)^n\, n^{-\alpha}\right)$.

V. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆☆☆ *« Série de Bertrand »*

Démontrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, de paramètres réels α et β, converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que lon précisera.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{2^n}$

Exercice 16 ☆☆☆ *CCP PSI 2016*

On définit la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ par : $u_k = \frac{1}{1+k^2}$.

1. Etablir la convergence de la série de terme général u_k.

   On note pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

2. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge.

Exercice 17 ☆☆☆

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer la série $\sum u_n$ a même nature que les séries :

1. Montrer la série $\sum u_n$ a même nature que la série : $\sum \ln(1+u_n)$;
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge

   indic. : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes partielles, ou bien l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2},\ \forall a,b \in \mathbb{R}$

Exercice 18 ☆☆☆☆

Soit (a_n) une suite décroissante de termes positifs telle que $\sum a_n$ converge.

1. En justifiant, démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n a_n \leq 2(S_n - S_{\lfloor n/2 \rfloor})$.
2. En déduire que $n a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. En déduire que la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$ converge.

Exercice 19 ☆☆☆

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$, en déduire que $s_n \sim \ln n$ quand n tend vers $+\infty$;
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = s_n - \ln n$, démontrer que (u_n) est une suite décroissante convergente de limite notée γ, prouver que $s_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$;
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, démontrer que $\sigma_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$, et que (σ_n) est une suite convergente et calculer sa limite ; retrouver ce résultat en remarquant que $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$;

Exercice 20 ☆☆☆

Soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite (u_n).
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n ;
3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux u_n , $(-1)^n u_n$, u_n/n
   (on pourra étudier la suite définie par :
   $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$)
4. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$

Exercice 21 ☆☆☆

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $\ln x = x - n$, a une solution unique dans $[1, +\infty[$ notée x_n, étudier la nature de $\sum (x_n)^\alpha$, pour α réel.

Exercice 22 ☆☆☆

Discuter selon la valeur des paramètres réels α, β la nature des séries suivantes de terme général :

a) $a_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ b) $b_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\beta}$

c) $c_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ d) $d_n = (1+n^\alpha)^\beta$

Exercice 23 ☆☆☆☆

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$ où λ est réel et $\sum v_n$ est une série absolument convergente

1. Pour tout n, on pose $w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \frac{\lambda}{n}$. Prouver que $\sum w_n$ est une série absolument convergente.
2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\lambda}$, pour un réel $A > 0$.
3. Etudier $\sum \left(\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.(2n)}\right)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 24 ☆☆☆

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes, démontrer que les séries de terme général $a_n = \sqrt{u_n v_n}$ et $b_n = \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ sont convergentes.

Exercice 25 ☆☆☆ *Mines-Ponts : série divergente*

Donner un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 26 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 27 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \geq 1$,

$$v_n = \left(n + \left((n-1) + \left(\cdots + (2 + 1^{\frac{1}{4}})\dots\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Donner la limite de la suite (v_n).

Montrer que $v_n = O(n^{\frac{1}{4}})$.

Exercice 28 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 29 ☆☆☆☆ *CCP MP 2017*

On définit la suite (u_n) par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ où a et b sont des réels strictement positifs. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et calculer sa somme en cas de convergence.

Indication : Étudier la suite (v_n) définie par : $v_n = (n+b-1)u_n$

Exercice 30 ☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \text{ et } v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge. On notera ℓ la somme de cette série.

2. A l'aide d'un encadrement par des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, montrer que $\lim\limits_{B\to+\infty} \displaystyle\int_0^B \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \ell$. Commentaire.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $|\sin t| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. En déduire une minoration de v_k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. Donner la nature de la série $\sum\limits_{k\geq 0} v_k$. Commentaire.

VI. Formule de Stirling

Exercice 31 ☆☆☆ *à savoir refaire*

1. *Equivalent de sommes partielles de séries positives divergentes*
   (a) Soient $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge.
   Justifier que pour tout $N \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} f(k+1) \leq \int_1^{N+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{N} f(k)$.
   (b) En déduire que $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f(k)$ est équivalent en $+\infty$ à $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) En déduire que $s_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ est équivalent en $+\infty$ à $\ln(N)$.
   (d) Le résultat du (b) est-il encore valable pour f croissante ?
2. *Développement limité de* $\ln(n!)$
   (a) Démontrer que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + O(n)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{O(n)}}$
   (b) En posant $u_n = \ln(n!) - n\ln(n)$ et en calculant $u_N - u_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} u_{k+1} - u_k$, vérifier que $u_N \underset{n\to+\infty}{\sim} -N$.
   En déduire que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + o(n)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{o(n)}}$
   (c) En posant $v_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n$ et en calculant $v_N - v_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} v_{k+1} - v_k$, vérifier que $v_N \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln N}{2}$.
   En déduire que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \dfrac{\ln n}{2} + o(\ln n)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\, \mathrm{e}^{o(\ln n)}}$
   (d) En posant $w_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n - \dfrac{\ln n}{2}$ et en calculant $w_N - w_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} w_{k+1} - w_k$, vérifier que w_N admet une limite finie ℓ lorsque $N \to +\infty$.
   (e) En posant $K = \mathrm{e}^{\ell}$, montrer que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \dfrac{\ln n}{2} + \ell + o(1)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}}$
3. *Intégrales de Wallis* On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, \mathrm{d}t$.
   (a) Calculer W_0 et W_1. Pour $k \geq 2$, établir une relation entre W_k et W_{k-2}.
   (b) En déduire les formules $\boxed{W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $\boxed{W_{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
   (c) Justifier que la suite (W_n) est décroissante et positive, et pour tout $n \geq 0$, $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$, puis que $\lim \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
   (d) En déduire la formule $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$.
   (e) En déduire la formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$

Notes

[3] correction : pour $a \neq 1$, $S_N = \dfrac{a^0 - a^{N+1}}{1-a}$. il y a concergence ssi $a^{N+1} \to 0$ c'est à dire ssi $|a| < 1$, vers $\dfrac{1}{1-a}$.

[15] correction :

1. $\ell = 0$
2. apcr, $u_{n+1} \leq \dfrac{1+1/2}{2} u_n$ et majoration par $O((3/4)^n)$
3. $\sum \ln(1+u_k)$ CV, car a même nature que $\sum u_k$, on a donc $u_n = \dfrac{u_0}{2^n} \times \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$; $K = \lim_n u_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$

[25] correction : équivalent à $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln 2)$

[26] correction : $|u_{n+1}| \to 0$, par DL2, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

[27] correction : diverge car $v_n^4 \geq n$, par réc $v_n^l e(2n)^{1/4}$ car $(2x+2)^{1/4} \leq x$ pour $x \geq 2$

[28] correction : $|u_{n+1}| \to 0$, par DL2, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

[29] correction : $v_{n+1} - v_n = (a+b-1)u_n$.

Cas $a+b-1 = 0$: $u_n = \dfrac{n-b+1}{n}$

Cas $a+b-1 \neq 0$ $\sum u_n$ CV ssi $\sum (v_{k+1} - v_k$ CV ssi (V_N) CV vers une limite L, auquel cas $u_n \sim L/n$. Si $L \neq 0$ DV. Si $L = 0$, $u_n = o(1)/n$

[31] correction : 1)d) :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(n) \leq I_n = \int_1^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k+1)$$

donc $f(1) + S_n \leq f(1) - f(n+1) + S_n \leq S_n \leq I_n$

et $I_n \to +\infty$ permet de conclure.