Méthodes à retenir :

- Pour trouver les solutions DSE d'une équation différentielle linéaire $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$, on suppose (analyse) qu'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $]-r, r[$ et solution de l'équation différentielle ; puis on effectue des regroupements de coefficients et changements d'indices pour réécrire cette équation sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 t^n$; à l'aide de l'unicité du DSE, on en déduit que les c_n sont tous nuls, ce qui permet de trouver une relation de récurrence permettant de préciser la suite (a_n).
  Ensuite (synthèse), on vérifie que pour de telles suites le rayon de convergence associé est effectivement strictement positive.
- Si $\sum a_n x^n$ converge, alors le rayon de convergence R vérifie : $R \geq |x|$.
- Si $\sum a_n x^n$ diverge, alors le rayon de convergence R vérifie : $R \leq |x|$.
- Pour déterminer le rayon de convergence, on peut appliquer la règle de d'Alembert vue pour les séries numériques, en posant, pour $z \neq 0$: $\alpha_n = |a_n z^n|$, puis en discutant selon les valeurs de z.
- Une fonction f DSE est paire (resp. impaire) si et seulement si le DSE de f ne contient que des puissances paires (resp.impaires).

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières :
a) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n} z^n$; b) $\sum_{n\geq 1} (n-1) z^n$; c) $\sum_{n\geq 0} \pi^n z^n$;

Exercice 2 ✰

Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$;

II. A savoir rédiger

Exercice 3 ✰

Développer en série entière sur un voisinage de l'origine $]-a, a[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1-x^5}$.

Exercice 4 ✰✰

A l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n} x^n$

Exercice 5 ✰✰✰

Trouver toutes les solutions développables en série entière sur un voisinage $]-a, a[$ de 0 de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad 2x\, y'' + y' - y = 0$$

Exercice 6 ✰✰

Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$;
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$;
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$, et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

III. Exercices

Exercice 7 ☆☆

On considère la fonction f définie par $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1) Justifier qu'elle est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

2) Vérifier que f' est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

3) En déduire son développement en série entière.

Exercice 8 ☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} z^n$.

Exercice 9 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $a_n =$:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\dfrac{n^n}{e^n n!}$;c) $\dfrac{\ln n}{1+\ln n}$; d) $\begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$;

e) $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$; f) $e^{\mathrm{i}n\theta}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé ;

Exercice 10 ☆☆ *CCP PSI*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{3n}{n+2} x^n$ puis calculer sa somme.

Exercice 11 ☆☆☆

Trouver la solution F développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$xy" + 3y' - 4x^3 y = 0$$

vérifiant la condition initiale $F(0) = 1$ et $F'(0) = 0$.

Exercice 12 ☆☆☆

1. Justifier que l'on a :

$$\forall x \in [0, 1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

2. Montrer que la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right)$$

converge simplement sur $[0, 1]$.

3. calculer la somme S de cette série.

4. La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 13 ☆

Montrer que la fonction Arctan est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et donner leur expressions sommatoires. On rappelle que Arctan est dérivable et que :$\forall x \in]-1, 1[,\ \operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 14 ☆☆

Rayon de convergence et somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \operatorname{ch} n \, x^n$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 15 ☆☆

Pour a réel positif non nul étudier la convergence sur $[0, 1[$ de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{an}$;

Pour $N \in \mathbb{N}$, rappeler les expressions de la somme partielle $S_N(x)$ et du reste $R_N(x)$ de cette série de fonctions en x.

Prouver que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+an}$.

Exercice 16 ☆☆☆

Soient $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$.

Déterminer les rayons de convergences et sommes des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Exercice 17 ✰✰✰

Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et sa somme en cherchant une équation différentielle du 3e ordre qu'elle vérifie.

Exercice 18 ✰✰✰ *Mines-Ponts PC*

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\ \mathrm{d}t$

1. Déterminer la limite de (I_n).
2. Donner un équivalent de (I_n).
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Etudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 19 ✰✰✰ *Mines-Ponts PC*

On pose $a_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 20 ✰✰✰ *dénombrement*

Soit N un entier naturel fixé. On souhaite déterminer le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que : $a + 2b + 5c = N$.

1) Développer en série entières sur $]-1, 1[$ les expressions : $\frac{1}{(1-x^1)}, \frac{1}{(1-x^2)}, \frac{1}{(1-x^5)}$.

2) Justifier que $(\sum_{a=0}^{+\infty} t^a)(\sum_{b=0}^{+\infty} t^{2b})(\sum_{c=0}^{+\infty} t^{5c})$

$= \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{a,b,c\in\mathbb{N},\ a+2b+3c=N} t^N.$

3) Exprimer le nombre de façons d'avoir N € à l'aide de pièces de 1 €, 2 €, ou 5 €, à l'aide des coefficients $(c_N) = (Card\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3; a + 2b + 5c = N\})$ du DSE de $t \mapsto \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^5)}$

Exercice 21 ✰✰✰

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R', justifier que :

1) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |a_n| \leq |b_n|$, alors $R' \leq R$.

2) a) comparer R etR' lorsque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$;

b) montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n$ a un rayon de convergence R" tel que $R" \geq RR'$;

c) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n^3 z^n$ est R^3 ;

d) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$;

Exercice 22 ✰✰✰ ✰

Soient $I =]-1, 1[$ et $f : x \longmapsto (\text{Arcsin}\, x)^2$.

1. Rappeler le développement en série entière de Arcsin sur I, et justifier que f y est développable en série entière.
2. Montrer que : $\forall x \in I,\ (1 - x^2) f'(x)^2 = 4f(x)$
3. En dérivant, justifier que f est solution sur I de l'équation différentielle : $(E)\ (1-x^2)y'' - xy' = 2$
4. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients du DSE de f sur I.
   (a) montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ (n + 1)(n + 2)a_{n+2} - n^2 a_n = 0.$
   (b) Calculer $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$ et en déduire a_0, a_1, a_2.
   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0,\ a_{2n} = \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{n\ (2n-1)!}$$
5. En déduire le développement en série entière de f sur I. Vérifier qu'il est constitué de puissances paires.

Exercice 23 ✰✰✰✰ *Mines-Ponts PC*

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\ \mathrm{d}t$

1. Déterminer la limite de (I_n).
2. Donner un équivalent de (I_n).
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Etudier sa convergence en R et en $-R$.