

Ordre des exercices : 1a, 1c, 1d, 2, 11, 17, 18 ; 9, 21, 16 ; 3, 6, 7, 19 ; 5, 12, ; 18, 19, 20, 21, 22

Méthodes à retenir :

- Pour trouver les solutions DSE d'une équation différentielle linéaire  $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$ , on suppose (analyse) qu'il existe  $r > 0$  et  $(a_n) \in \mathbb{C}^n$  tels que  $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  est définie sur  $] -r, r[$  et solution de l'équation différentielle ; puis on effectue des regroupements de coefficients et changements d'indices pour réécrire cette équation sous la forme  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0t^n$  ; à l'aide de l'unicité du DSE, on en déduit que les  $c_n$  sont tous nuls, ce qui permet de trouver une relation de récurrence permettant de préciser la suite  $(a_n)$ . Ensuite (synthèse), on vérifie que pour de telles suites le rayon de convergence associé est effectivement strictement positive.
- Si  $\sum a_n x^n$  converge, alors le rayon de convergence  $R$  vérifie :  $R \geq |x|$ .
- Si  $\sum a_n x^n$  diverge, alors le rayon de convergence  $R$  vérifie :  $R \leq |x|$ .
- Pour déterminer le rayon de convergence, on peut appliquer la règle de d'Alembert vue pour les séries numériques, en posant, pour  $z \neq 0$  :  $\alpha_n = |a_n z^n|$ , puis en discutant selon les valeurs de  $z$ .
- Une fonction  $f$  DSE est paire (resp. impaire) si et seulement si le DSE de  $f$  ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

## I. Applications directes du cours

### Exercice 1 ☆

Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières :

a)  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} z^n$  ; b)  $\sum_{n \geq 1} (n - 1) z^n$  ; c)  $\sum_{n \geq 0} \pi^n z^n$  ; d)  $\sum_{n \geq 0} e^{-n} z^n$  ;

### Exercice 2 ☆

Donner le rayon de convergence et la somme de la série

entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$  ;

## II. A savoir rédiger

### Exercice 3 ☆

Développer en série entière sur un voisinage de l'origine  $] -a, a[$ , la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{1 - x^3}$ .

### Exercice 4 ☆☆

A l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{sh } n}{\text{ch } n} x^n$

### Exercice 5 ☆☆☆

Trouver toutes les solutions développables en série entière sur un voisinage  $] -a, a[$  de 0 de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad 2x y'' + y' - y = 0$$

### Exercice 6 ☆☆

Soit  $x \in ] -1, 1[$ .

1. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$ , et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} ;$$

2. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1 - x)^2}$ , et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} ;$$

3. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1 - x)^3} + \frac{x}{(1 - x)^2}$ ,

et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$  ;

### III. Exercices

#### Exercice 7 ☆☆☆ CC-INP PC

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n}$ .

#### Exercice 8 ☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} z^n$ .

#### Exercice 9 ☆☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$ , avec  $a_n =$ :

- a)  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ; b)  $\frac{n^n}{e^n n!}$ ; c)  $\frac{\ln n}{1 + \ln n}$ ; d)  $\begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$  ;  
e)  $\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ ; f)  $e^{in\theta}$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé;

#### Exercice 10 ☆☆☆ Mines-Télécom

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  est  $+\infty$ .

#### Exercice 11 ☆☆☆ Mines-Télécom

Ensemble de définition de la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} x^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$  ?

#### Exercice 12 ☆☆☆

Trouver la solution  $F$  développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$$

vérifiant la condition initiale  $F(0) = 1$  et  $F'(0) = 0$ .

#### Exercice 13 ☆☆☆ CC-INP PSI

$a_0 = a_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$ .

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a_n}{n!} \leq 1$ .
- 2) Qu'en déduit-on sur le rayon de convergence de la série entière  $\left(\sum \frac{a_n}{n!} x^n\right)$  ?

On note  $f$  la somme de cette série entière.

- 3) Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont  $f$  est solution.

- 4) Vérifier que  $f : x \mapsto e^{x+\frac{x^2}{2}}$  convient.

#### Exercice 14 ☆☆☆

1. Justifier que l'on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

2. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \left( \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right)$$

converge simplement sur  $[0, 1]$ .

3. calculer la somme  $S$  de cette série.
4. La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur  $[0, 1]$  ?

#### Exercice 15 ☆

Montrer que la fonction Arctan est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ , et donner leur expressions sommatoires. On rappelle que Arctan est dérivable et que  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

#### Exercice 16 ☆☆☆

Rayon de convergence et somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \text{ch } n x^n$

## IV. Pour aller plus loin

### Exercice 17 ☆☆

Pour  $a$  réel positif non nul étudier la convergence sur  $[0, 1[$  de  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{an}$  ;

Pour  $N \in \mathbb{N}$ , rappeler les expressions de la somme partielle  $S_N(x)$  et du reste  $R_N(x)$  de cette série de fonctions en  $x$ .

Prouver que : 
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+an}.$$

### Exercice 18 ☆☆☆

Soient  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 1$ .

On définit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  en posant : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = 2b_n$  et  $b_{n+1} = 3a_n$ .

Déterminer les rayons de convergences et sommes des séries  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ .

### Exercice 19 ☆☆☆

Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  et sa somme en cherchant une équation différentielle du 3e ordre qu'elle vérifie.

### Exercice 20 ☆☆☆ Mines-Ponts PC

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$

- Déterminer la limite de  $(I_n)$ .
- Donner un équivalent de  $(I_n)$ .
- Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière de terme général  $I_n x^n$ . Etudier sa convergence en  $R$  et en  $-R$ .

### Exercice 21 ☆☆☆ Mines-Ponts PC

On pose  $a_0 = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$   
Calculer les  $a_n$  en utilisant la série entière de terme général  $\frac{a_n}{n!} x^n$ .

### Exercice 22 ☆☆☆ dénombrement

Soit  $N$  un entier naturel fixé. On souhaite déterminer le nombre de triplets  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  tels que :  
 $a + 2b + 5c = N$ .

1) Développer en série entières sur  $] -1, 1[$  les expressions :  $\frac{1}{(1-x^1)}$ ,  $\frac{1}{(1-x^2)}$ ,  $\frac{1}{(1-x^5)}$ .

2) Justifier que  $(\sum_{a=0}^{+\infty} t^a)(\sum_{b=0}^{+\infty} t^{2b})(\sum_{c=0}^{+\infty} t^{5c})$

$$= \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{a,b,c \in \mathbb{N}, a+2b+3c=N} t^N.$$

3) Exprimer le nombre de façons d'avoir  $N \in \mathbb{N}$  à l'aide de pièces de 1 €, 2 €, ou 5 €, à l'aide des coefficients  $(c_N) = (\text{Card}\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3; a + 2b + 5c = N\})$  du DSE de  $t \mapsto \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^5)}$

### Exercice 23

Soit

$$f : x \mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Déterminer un intervalle  $I$  ouvert contenant 0 le plus grand possible sur lequel  $f$  peut être définie.
- Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1.
- Déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.
- En déduire que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser les coefficients de son développement en série entière.

**Exercice 24** ☆☆☆

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de

rayons de convergence respectifs  $R$  et  $R'$ , justifier que :  
1) s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n|$ , alors  $R' \leq R$ .

2) a) comparer  $R$  et  $R'$  lorsque  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$  ;

b) montrer que  $\sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n$  a un rayon de convergence  $R''$  tel que  $R'' \geq RR'$  ;

c) montrer que le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n^3 z^n$  est  $R^3$  ;

d) montrer que le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$  est  $\sqrt{R}$  ;

**Exercice 25** ☆☆☆ ☆

Soient  $I = ]-1, 1[$  et  $f : x \mapsto (\text{Arcsin } x)^2$ .

1. Rappeler le développement en série entière de Arcsin sur  $I$ , et justifier que  $f$  y est développable en série entière.

2. Montrer que :  $\forall x \in I, (1 - x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$

3. En dérivant, justifier que  $f$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle : (E)  $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$

4. On note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les coefficients du DSE de  $f$  sur  $I$ .

(a) montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(n+2)a_{n+2} - n^2 a_n = 0.$$

(b) Calculer  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  et en déduire  $a_0, a_1, a_2$ .

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0, a_{2n} = \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{n(2n-1)!}$$

5. En déduire le développement en série entière de  $f$  sur  $I$ . Vérifier qu'il est constitué de puissances paires.

# Notes

<sup>5</sup> correction :  $y(x) = C1 * \sinh(\sqrt{x} * \sqrt{2}) + C2 * \cosh(\sqrt{x} * \sqrt{2})$

<sup>21</sup> correction : On pose  $b_n = \frac{a_n}{n!}$  R le RCV de  $\sum b_n z^n$ . On a  $b_0 = 1$  et  $(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} b_k$

<sup>23</sup> correction :

1.  $f$  définie sur  $] -1, 1[$  et  $y$  est DSE comme produit de telles fonctions.

2.  $(x^2 - 1)y' + xy - 1 = 0$

3.  $-(a_1 + 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (na_{n-1} + (n+1)a_{n+1})x^n = 0$

$$a_0 = f(0) = \pi/2 \quad a_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad a_1 = -1 \quad a_{2q+1} = -\frac{(2^q q!)^2}{(2q+1)!}$$

4.  $f$  est DSE sur  $] -1, 1[$  comme produit de telles fonctions!

<sup>25</sup> correction : a) TCD avec  $e^{-t^n} \leq e^{-t}$  b) CDV  $u = t^n$ ,  $I_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u} du$  et TCD  $\int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u} du \xrightarrow{f} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  donc  $I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  c)  $R = 1$  par d'Alembert, et la série diverge en 1. Le CSSA donne la convergence en  $-1$ .