Méthodes à retenir :

- A l'aide du tableau de variations de f_n dérivable sur I, il est aisé de calculer la valeur de $\|f_n\|_{\infty,I} = \sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$.
- Pour démontrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction limite f, il suffit de montrer que $\|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Sur un segment $[a,b]$, le théorème d'interversion permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la suite de fonctions continue (f_n) CVU sur $[a,b]$.
- Sur un segment $[a,b]$, lorsque la suite de fonctions continues (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers f, on sait que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$.
- Sur un intervalle quelconque I,
  si la suite (f_n) de fonctions continues p.m. **CVS vers** f,
  et s'il existe une fonction φ **continue p.m., positive intégrable sur** I telle que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)}$
  (domination par majoration des $|f_n|$ indépendemment de n, par φ intégrable),
  le **théorème de convergence dominée** permet de montrer que, f et les f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I, que la suite numérique $\left(\int_I f_n\right)_n$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$

I. Convergence d'une suite de fonctions

Exercice 1 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x^n$.
1) Notons $J = [0,1[$. Montrer que (f_n) converge simplement vers f sur J.
2) (f_n) converge-t-elle simplement vers f sur $[0,1]$?
3) Montrer que la convergence est uniforme sur $K = [1/4, 1/2]$.

Exercice 2 ☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $t \mapsto \exp(t)$.

Exercice 3 ☆☆

Pour chaque suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, étudier la convergence simple sur I vers une éventuelle fonction limite :
a) $I =]-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto (n-1)x^n$;
b) $I = [0,\pi/2]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ g_n : x \mapsto (\cos x)^n$;
c) $I = [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+nx^2}$;
d)$I = [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ i_n : x \mapsto \dfrac{nx+1}{n^2+n^3x^2}$;
e)$I = [-1/2, 1/2]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ j_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n}^{n^2} x^k$.

Exercice 4 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de f_n.
2. En déduire que pour tout $a > 0$, f_n est bornée sur $[a,+\infty[$ et $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{e^{-na}}{a}$.
3. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $]0,+\infty[$.
4. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]0,+\infty[$.
5. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]1,+\infty[$.

Exercice 5 ☆☆

Montrer que la suite (f_n) définie par

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{nx+1}{n+nx^2}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.

II. Limite d'une suite d'intégrales

Exercice 6 ☆☆

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n^2}$. Après avoir étudié la convergence uniforme de $(f_n)_n$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$

Exercice 7 ☆☆

On pose pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}dx$. Justifier qu'on peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis que cette suite converge et donner sa limite.

Exercice 8 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{(-t)^n}{1+t^2}$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$.

   (b) Justifier que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue positive intégrable sur $[0,1]$, et domine la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \le \varphi(t)$).

   (c) Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $f : t \mapsto 0$.

2. En appliquant le théorème de convergence dominée, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 9 ☆☆☆

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t^\gamma}\mathrm{d}t$ pour $\gamma > 1$.

Exercice 10 ☆☆

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n+\sqrt{x}}dx$.

Justifier l'existence de v_n pour tout entier $n \ge 2$ et étudier la limite éventuelle de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 11 ☆☆

On pose pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^n\sin(nt^2)}{1+t^2}dt$. Justifier que la suite converge et donner sa limite sous forme intégrale ; calculer cette intégrale.

Exercice 12 ☆☆

Justifier que la suite $(f_n)_{n\ge1}$ de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(t) = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

La suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\ge1}$ admet-elle une limite finie ?

on pourra utiliser l'inégalité : $\ln(1+u) \le u, \forall u > -1$

Exercice 13 ☆☆

Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x}$$

III. Dérivée d'une limite de suite de fonctions

Exercice 14 ☆☆

Pour $n \ge 1$, on pose $g_n : t \longmapsto n\exp(-n-t)$.

1. La suite (g_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une limite g ?
2. La fonction g est-elle dérivable ?
3. Pour $n \ge 1$, g_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n'(t)$?

IV. Pour aller plus loin

Exercice 15 ☆☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{nt}{n+1}}$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Etudier la convergence uniforme sur tout segment du type $[a, b]$.

Exercice 16 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $J_n = \displaystyle\int_{[0,1]} t^n(1-t)^n \mathrm{d}t$;
prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$;

Exercice 17 ☆☆ *CCP PSI 2010*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Etudier l'intégrabilité de $f : t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, existence de l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2} + t^n} \mathrm{d}t.$$
3. Déterminer la limite éventuelle de la suite (I_n).

Exercice 18 ☆☆☆

Soit $A > 0$, et $I = [0, A] \subset \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. En utilisant l'inégalité $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ valable sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle, notée $\tilde{0}$.
2. Retrouver ce résultat en majorant $|f_n(x) - \tilde{0}(x)|$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 19 ☆☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \sqrt{n}\ \sin x\ (\cos x)^n$.

1. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.
2. Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Exercice 20 ☆☆ *lemme de Riemann-Lebesgue*

Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H_m = \displaystyle\int_\alpha^\beta h(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t$.

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\lim\limits_{m\to+\infty} H_m = 0$

Exercice 21 ☆☆

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : t \longmapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$.

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0, \pi]$ vers une limite f ?
2. La fonction f est-elle dérivable ?
3. Pour $n \geq 1$, f_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in [0, \pi]$, $f'(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(t)$?

Exercice 22 ☆☆

Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : t \longmapsto n\exp(-n-t)$.

1. La suite (g_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une limite g ?
2. La fonction g est-elle dérivable ?
3. Pour $n \geq 1$, g_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n'(t)$?

Notes

[2] correction : DL1 $\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) = \frac{t}{n} + O(n^{-2})$

[15] correction : IAF $|f_n(t) - \mathrm{e}^t| \leq \mathrm{e}^b |t/(n+1)|$

[19] correction : Par calcul direct de primitive, on a $\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$ $f_n(t) \to 0$, donc CVS vers $\tilde{0}$.

$f_n(\arctan(1/\sqrt{n})) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)/2} \to e^{-1/2} \neq 0$ pas de CVU !