

Méthodes à retenir :

- A l'aide du tableau de variations de  $f_n$  dérivable sur  $I$ , il est aisé de calculer la valeur de  $\|f_n\|_{\infty, I} = \sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$ .
- Pour démontrer qu'une suite de fonctions  $(f_n)_n \in \mathbb{N}$  converge uniformément sur un intervalle  $I$  vers une fonction limite  $f$ , il suffit de montrer que  $\|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Sur un segment  $[a, b]$ , le théorème d'inversion permet de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$ , lorsque la suite de fonctions continue  $(f_n)$  CVU sur  $[a, b]$ .
- Sur un segment  $[a, b]$ , lorsque la suite de fonctions continues  $(f_n)$  CVU sur  $[a, b]$  vers  $f$ , on sait que  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  est continue sur  $[a, b]$ .
- Sur un intervalle quelconque  $I$ , si la suite  $(f_n)$  de fonctions continues p.m. **CVS** vers  $f$ , et s'il existe une fonction  $\varphi$  **continue p.m., positive intégrable sur  $I$**  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$  (domination par majoration des  $|f_n|$  indépendamment de  $n$ , par  $\varphi$  intégrable), le **théorème de convergence dominée** permet de montrer que,  $f$  et les  $f_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  sont intégrables sur  $I$ , que la suite numérique  $\left(\int_I f_n\right)_n$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$
- Pour démontrer qu'une série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur un intervalle  $I$  vers une fonction somme  $S$ , il suffit de montrer que la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty, I}$  converge. On a alors convergence normale donc convergence uniforme de la suite des fonctions sommes partielles vers la fonction somme.
- Sur un intervalle  $I$ , lorsque la série de fonctions continues  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément (a fortiori si converge normalement), alors la somme  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $I$ .
- Sur un segment  $[a, b]$ , le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$ , lorsque la série de fonction converge uniformément, a fortiori lorsqu'elle converge normalement sur  $[a, b]$ .
- Sur un intervalle quelconque  $I$ , le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ , lorsque la série de fonction c.p.m.intégrables converge simplement, et que la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(t)| dt$  converge.
- Sur un intervalle quelconque  $I$ , pour une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , telle que la série de fonctions  $\sum u_n$  CVS sur  $I$ , et telle que la série  $\sum u'_n$  des dérivées CVU sur  $I$ , on peut dériver terme à terme.

## I. Convergence d'une suite de fonctions

### Exercice 1 ☆☆☆

Pour chaque suite de fonctions dans  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ , étudier la convergence simple sur  $I$  vers une éventuelle fonction limite :

- $I = ]-1, 1[$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto (n-1)x^n$  ;
- $I = [0, \pi/2]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto (\cos x)^n$  ;
- $I = [0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, h_n : x \mapsto \frac{1}{1+n x^2}$  ;
- $I = [0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, i_n : x \mapsto \frac{n x + 1}{n^2 + n^3 x^2}$  ;
- $I = [-1/2, 1/2]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, j_n : x \mapsto \sum_{k=n}^{+\infty} x^k$ .

### Exercice 2 ☆

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ .

Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction  $t \mapsto \exp(t)$ .

### Exercice 3 ☆☆☆

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-nx}}{x}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Etudier les variations de  $f_n$ .
- En déduire que pour tout  $a > 0$ ,  $f_n$  est bornée sur  $[a, +\infty[$  et  $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{e^{-na}}{a}$ .
- Etudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Etudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Etudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $]1, +\infty[$ .

## II. Limite d'une suite d'intégrales

### Exercice 4 ☆☆☆

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n + \sqrt{x}} dx$ .

Justifier l'existence de  $v_n$  pour tout entier  $n \geq 2$  et étudier la limite éventuelle de la suite  $(v_n)_n$ .

### Exercice 5 ☆☆☆

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}} dx$ . Justifier qu'on peut définir la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis que cette suite converge et donner sa limite sous forme intégrale (on ne demande pas le calcul de l'intégrale).

**Exercice 6** ☆☆☆

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_0^1 \frac{1+t^n \sin(nt^2)}{1+t^2} dt$ . Justifier que la suite converge et donner sa limite sous forme intégrale ; calculer cette intégrale.

**Exercice 7** ☆☆☆

Justifier que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

converge simplement sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera.

La suite  $\left(\int_0^1 f_n(t) dt\right)_{n \geq 1}$  admet-elle une limite finie ?

### IV. Applications directes du cours

**Exercice 10** ☆☆☆

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1 - x^n$ .

- Notons  $J = [0, 1[$ . Montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $J$ .
- $(f_n)$  converge-t-elle simplement vers  $f$  sur  $[0, 1]$  ?
- Montrer que la convergence est uniforme sur  $K = [1/4, 1/2]$ .

**Exercice 11** ☆☆☆ Intersion  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$  et  $\int_{[0,1]}$  :

*Théorème de convergence dominée*

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{(-t)^n}{1+t^2}$

- (a) Justifier que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$ .
  - (b) Justifier que la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue positive intégrable sur  $[0, 1]$ , et domine la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (i.e. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ ).
  - (c) Justifier que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[0, 1[$  vers  $f : t \mapsto 0$ .
2. En appliquant le théorème de convergence dominée, en déduire que la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t^2} dt\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } 0.$$

**Exercice 12** ☆☆☆

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $u_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{x}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Etudier les variations de  $u_n$ .

on pourra utiliser l'inégalité :  $\ln(1+u) \leq u, \forall u > -1$

**Exercice 8** ☆☆☆

Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{dx}{x^n + e^x}$$

### III. Dérivée d'une limite de suite de fonctions

**Exercice 9** ☆☆☆

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $g_n : t \mapsto n \exp(-n-t)$ .

- La suite  $(g_n)$  converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers une limite  $g$  ?
- La fonction  $g$  est-elle dérivable ?
- Pour  $n \geq 1$ ,  $g_n$  est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
- A-t-on pour tout  $t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'_n(t)$  ?

- En déduire que pour tout  $a > 0$ ,  $u_n$  est bornée sur  $[a, +\infty[$  et  $\|u_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{e^{-na}}{a}$ .
- Quelle est la nature de la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-na}}{a}$  ?
- Que peut-on en déduire pour la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ?
- En déduire que la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 13** ☆☆☆

Soit  $I = ]0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^{-nx}$ .

Etudier la convergence simple puis la convergence normale sur  $I$  de la série de fonctions  $\sum f_n$ .

Même question en restriction à  $J = [1/2, 1]$ .

**Exercice 14** ☆☆☆ Intersion  $\sum_{n=0}^{+\infty}$  et  $\int_{[0,1]}$  :

*Théorème d'intégration terme à terme*

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t^n \ln t$

- (a) Justifier que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  est continue sur  $]0, 1]$ .
- (b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  est continue intégrable sur  $]0, 1]$ , et que :  $\int_0^1 |v_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ .

(c) En déduire que la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \int_{]0,1[} |v_n|$  converge.

2. Justifier que pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ .

3. On admet que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

En appliquant le théorème d'intégration terme à terme, en déduire que :  $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = \frac{-\pi^2}{6}$

**Exercice 15** ☆☆

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 16** ☆☆☆ Interspersion  $\sum_{n=0}^{+\infty}$  et  $\frac{d}{dt}$ , calculs de sommes de « séries dérivées »

## V. Séries de fonctions

**Exercice 17** ☆☆☆☆

On pose  $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x$  pour  $x \in ]0, 1]$  et  $u_n(0) = 0$

1. Calculer, pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

2. Montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

3. En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

**Exercice 18** ☆☆

Soit  $a > 0$ . Quel est l'ensemble de définition de

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (ax)^n ?$$

**Exercice 19** ☆☆

1) Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$ , où  $f_n$  est définie

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $w_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t^n$

1. (a) Justifier que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1, 1[$ .

(b) Justifier que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} w_n$  converge simplement sur  $] - 1, 1[$  vers  $S : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ .

(c) Justifier que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} w'_n$  converge normalement sur tout segment de  $] - 1, 1[$ .

2. En appliquant le théorème de dérivation terme à terme, en déduire que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1, 1[$  et calculer sa dérivée en tout point.

3. En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ .

4. En reprenant la méthode à l'ordre 2, calculer  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$ .

pour  $x \in [0, +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + x}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ . On note  $S$  sa somme.

2) Pour tout  $n \geq 1$ , calculer  $\|f_n\|_\infty$ .

3) La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge-t-elle normalement sur  $\mathbb{R}^+$  ?

Normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}^+$  ?

4) Montrer que la fonction  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ .

**Exercice 20** ☆

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{x^2 + n^2}$$

**Exercice 21** ☆☆☆

Démontrer que la fonction

$$\psi : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)^x}$$

est définie et continue sur  $I = [1, +\infty[$ .

## VI. A savoir rédiger

### Exercice 22 ☆☆

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{(1 - \frac{t}{n})^\gamma}{t^\gamma} dt$  pour  $\gamma > 1$ .

### Exercice 23 ☆☆ *intersion lim-int avec CVU*

Soit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n^2}$ . Après avoir étudié la convergence uniforme de  $(f_n)_n$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0$

### Problème 1 ☆☆ *Fonction Dzêta*

On considère la fonction  $\zeta$  de la variable réelle  $x$  définie par la relation  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $\zeta$ .
- Soit  $a \in ]1; +\infty[$ . Montrer que la fonction  $\zeta$  est continue sur l'intervalle  $[a; +\infty[$ .

Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction  $\zeta$  ?

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in ]1; +\infty[$ ,

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

(b) Montrer que la fonction  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1; +\infty[$

et donner l'expression de  $\zeta^{(k)}(x)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in ]1; +\infty[$  sous forme d'une série.

- Préciser le sens de variation de  $\zeta$ .
- On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction  $\zeta$  en  $+\infty$ .

(a) Montrer que  $\zeta$  possède une limite finie en  $+\infty$ .

(b) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$\forall x \geq 2, 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(c) En déduire la valeur de la limite de  $\zeta$  en  $+\infty$ .

- On considère à présent  $h \in ]0; +\infty[$ .

A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de  $\zeta(1+h)$  puis un équivalent de  $\zeta(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1.

- Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction  $\zeta$ .

- On pose :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ .

(a) Justifier que  $F$  est bien définie.

(b) Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(c) Montrer que :

$$\forall x \in ]1; +\infty[, \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x} \zeta(x).$$

(d) Déterminer ensuite la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

## VII. Pour aller plus loin

### Exercice 24 ☆☆☆

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $J_n = \int_{[0,1]} t^n(1-t)^n dt$ ;  
prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ ;

### Exercice 25 ☆☆☆ CCP PSI 2010

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Etudier l'intégrabilité de  $f : t \mapsto \frac{\text{Arctan } t}{t^\alpha}$  sur  $]0, +\infty[$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , existence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{t^{3/2} + t^n} dt.$$

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(I_n)$ .

### Exercice 26 ☆☆☆

Soit  $A > 0$ , et  $I = [0, A] \subset \mathbb{R}^+$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ .

1. En utilisant l'inégalité  $0 \leq \ln(1+u) \leq u$  valable sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction nulle, notée  $\tilde{0}$ .
2. Retrouver ce résultat en majorant  $|f_n(x) - \tilde{0}(x)|$  à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

### Exercice 27 ☆☆☆

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n : x \mapsto \sqrt{n} \sin x (\cos x)^n$ .

1. Existence et calcul de  $\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt$ .
2. Existence et calcul de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt$ .
3. La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, \pi/2]$ ?

### Exercice 28 ☆☆☆ lemme de Riemann-Lebesgue

Soit  $h$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[\alpha, \beta]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On pose, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $H_m = \int_\alpha^\beta h(t) e^{imt} dt$ .

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} H_m = 0$

### Exercice 29 ☆☆☆

On dit que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  approche uniformément la fonction  $f$  sur  $[a, b]$

ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall x \in [a, b], |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Montrer que la suite  $(f_n)$  définie par

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx + 1}{n + nx^2}$$

approche uniformément sur  $[0, 1]$  la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ .

### Exercice 30 ☆☆☆

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$ .

1. La suite  $(f_n)$  converge-t-elle simplement sur  $[0, \pi]$  vers une limite  $f$ ?
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable?
3. Pour  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout  $t \in [0, \pi]$ ,  $f'(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(t)$ ?

### Exercice 31 ☆☆☆

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $g_n : t \mapsto n \exp(-n-t)$ .

1. La suite  $(g_n)$  converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers une limite  $g$ ?
2. La fonction  $g$  est-elle dérivable?
3. Pour  $n \geq 1$ ,  $g_n$  est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $g'(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'_n(t)$ ?

### Exercice 32 ☆☆☆

Justifier que  $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que  $f$  est  $2\pi$ -périodique et impaire.

### Exercice 33 ☆☆☆

1. Exprimer  $\frac{1}{1+t}$  sous la forme de la somme d'une série numérique géométrique, pour  $t \in [0, 1[$ .

2. Démontrer que  $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

### Exercice 34 ☆☆☆

Pour  $x > 0$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Justifier que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .
2. En remarquant que  $S'(x)$  est du signe de  $-1/x^2$ , préciser le sens de variation de  $S$ .
3. Etablir que :

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

4. Donner un équivalent de  $S$  en 0.

5. En remarquant que

$$\frac{S(x) + S(x + 1)}{2} \leq S(x) \leq \frac{S(x) + S(x - 1)}{2}$$

donner un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 35** ☆☆☆☆ *Etude d'une somme de fonctions*

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}.$$

1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur

$$\mathcal{D} = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

On note  $S$  la somme de cette série de fonctions.

2. Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$  et étudier le signe de  $S'(x)$  suivant les valeurs de  $x \in \mathcal{D}$ .
3. Montrer que  $S$  admet une limite en 1.

4. Montrer que  $S$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

5. Donner le tableau de variations de  $S$ , puis tracer l'allure de la courbe représentative de  $S$ .

**Exercice 36** ☆☆☆ *Intégrale d'une somme de fonctions*

Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$ .

1. Justifier que l'on définit bien une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  par l'expression précédente.
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $I = ]0, +\infty[$ .  
*notons qu'il suffit de montrer le résultat sur tout segment de  $I$*
3. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et que

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1 + \sqrt{n+1})}$$

4. Montrer que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

# Notes

<sup>2</sup> correction : DL1  $\ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) = \frac{t}{n} + O(n^{-2})$

<sup>15</sup> correction :

<sup>17</sup> correction :

1. Pour  $x \in ]0, 1[$ , on reconnaît une série géométrique de raison  $-x^2 \in ]-1, 1[$ , donc convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -x^2 \ln x \frac{1}{1+x^2}$$

Cette expression est encore valable pour  $x = 1$ .

2. • On peut essayer de montrer la convergence normale :  $u_n$  est dérivable,  $u'_n(x) = (-1)^{n+1}[(2n+2)x^{2n+1} \ln x + x^{2n+1}] = (-1)^{n+1}x^{2n+1}((2n+2) \ln x + 1)$ .  
 $((2n+2) \ln x + 1) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/(2n+2)}$

Ainsi  $u'_n$  change de signe en  $e^{-1/(2n+2)}$ , et  $\|u_n\|_{\infty, ]0, 1[} = |u_n(e^{-1/(2n+2)})| = \frac{1}{(2n+2)e}$ , mais ce n'est pas le terme général d'une série convergente... La série  $\sum u_n$  ne converge pas normalement sur  $]0, 1[$ .

• On va étudier la CVU à l'aide de la fonction  $R_N = S - S_N : x \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$ .

On calcule pour  $x \in ]0, 1[$  et  $N \in \mathbb{N} : R_N(x) = -x^2 \ln x \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} = \frac{(-1)^N x^{2N+4} \ln x}{1+x^2}$ .

Ainsi,  $|R_N(x)| \leq -\ln(x)x^{2N+4}$ , car  $\ln(x) \leq 0$ .

Donc  $R_N$  est bornée sur  $]0, 1[$  et compte-tenu du calcul fait pour  $\|u_n\|_{\infty, ]0, 1[}$ , on a  $\|R_N\|_{\infty, ]0, 1[} \leq \|u_{2N+4}\|_{\infty, ]0, 1[} = \frac{1}{(2(2N+4)+2)e}$

Comme  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2(2N+4)+2)e} = 0$ , par théorème d'encadrement,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|R_N\|_{\infty, ]0, 1[} = 0$

Comme  $R_N(0) = 0$ , pour tout  $N$ , on a donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S - S_N\|_{\infty, [0, 1]} = 0$ . Ainsi  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

3. On applique le théorème d'intégration terme à terme sur le segment  $[0, 1]$  :

- on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est continue sur  $[0, 1]$  (limite usuelle en 0).

- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  CVU sur  $[0, 1]$  vers  $S : x \mapsto \begin{cases} -x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Donc  $S$  est continue sur  $[0, 1]$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 u_n$  converge et

$$\int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x dx$$

Pour  $n \geq 1$ , par IPP,  $\int_0^1 u_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+3} dx = \frac{1}{(2n+3)^2}$

Donc  $1 = \int_0^1 -\ln x dx = \int_0^1 \frac{-(1+x^2) \ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx$

d'où  $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2} dx = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x dx$

Conclusion :  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$ , compte-tenu du décalage d'indice.

<sup>21</sup> correction : on utilise le CSSA pour la CVU

<sup>27</sup> correction : Par calcul direct de primitive, on a  $\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0$

Pour tout  $t \in [0, \pi/2]$   $f_n(t) \rightarrow 0$ , donc CVS vers  $\vec{0}$ .

$f_n(\arctan(1/\sqrt{n})) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)/2} \rightarrow e^{-1/2} \neq 0$  pas de CVU!

<sup>36</sup> correction : on minore  $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  non intégrable en  $+\infty$ .