

Méthodes à retenir :

- A l'aide du tableau de variations de f_n dérivable sur I , il est aisé de calculer la valeur de $\|f_n\|_{\infty, I} = \sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$.
- Pour démontrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction limite f , il suffit de montrer que $\|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Sur un segment $[a, b]$, le théorème d'interversion permet de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la suite de fonctions continue (f_n) CVU sur $[a, b]$.
- Sur un segment $[a, b]$, lorsque la suite de fonctions continues (f_n) CVU sur $[a, b]$ vers f , on sait que $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.
- Sur un intervalle quelconque I , si la suite (f_n) de fonctions continues p.m. CVS vers f , et s'il existe une fonction φ continue p.m., positive intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ (domination par majoration des $|f_n|$ indépendamment de n , par φ intégrable), le **théorème de convergence dominée** permet de montrer que, f et les f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I , que la suite numérique $\left(\int_I f_n\right)_n$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$

I. Convergence d'une suite de fonctions

Exercice 1 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x^n$.

- 1) Notons $J = [0, 1[$. Montrer que (f_n) converge simplement vers f sur J .
- 2) (f_n) converge-t-elle simplement vers f sur $[0, 1]$?
- 3) Montrer que la convergence est uniforme sur $K = [1/4, 1/2]$.

Exercice 2 ☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $t \mapsto \exp(t)$.

Exercice 3 ☆☆

Pour chaque suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, étudier la convergence simple sur I vers une éventuelle fonction limite :

- a) $I =]-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto (n-1)x^n$;
- b) $I = [0, \pi/2], \forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto (\cos x)^n$;
- c) $I = [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, h_n : x \mapsto \frac{1}{1 + nx^2}$;
- d) $I = [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, i_n : x \mapsto \frac{nx + 1}{n^2 + n^3 x^2}$;
- e) $I = [-1/2, 1/2], \forall n \in \mathbb{N}, j_n : x \mapsto \sum_{k=n}^{\infty} x^k$.

Exercice 4 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de f_n .
2. En déduire que pour tout $a > 0$, f_n est bornée sur $[a, +\infty[$ et $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{e^{-na}}{a}$.
3. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $]0, +\infty[$.
4. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]0, +\infty[$.
5. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]1, +\infty[$.

Exercice 5 ☆☆

Montrer que la suite (f_n) définie par

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx + 1}{n + nx^2}$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$.

II. Limite d'une suite d'intégrales

Exercice 6 ☆☆

Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n^2}$. Après avoir étudié la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0$$

Exercice 7 ☆☆

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$. Justifier qu'on peut définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis que cette suite converge et donner sa limite.

Exercice 8 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{(-t)^n}{1+t^2}$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1]$.

(b) Justifier que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue positive intégrable sur $[0, 1]$, et domine la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$).

(c) Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f : t \mapsto 0$.

2. En appliquant le théorème de convergence dominée, en déduire que la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t^2} dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } 0.$$

Exercice 9 ☆☆☆

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{t^\gamma} dt$ pour $\gamma > 1$.

Exercice 10 ☆☆☆

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n + \sqrt{x}} dx$.

Justifier l'existence de v_n pour tout entier $n \geq 2$ et étudier la limite éventuelle de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 11 ☆☆☆

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{1 + t^n \sin(nt^2)}{1 + t^2} dt$. Justifier que la suite converge et donner sa limite sous forme intégrale ; calculer cette intégrale.

Exercice 12 ☆☆☆

Justifier que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

La suite $\left(\int_0^1 f_n(t) dt \right)_{n \geq 1}$ admet-elle une limite finie ?

on pourra utiliser l'inégalité : $\ln(1+u) \leq u, \forall u > -1$

Exercice 13 ☆☆☆

Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{dx}{x^n + e^x}$$

III. Dérivée d'une limite de suite de fonctions

Exercice 14 ☆☆☆

Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : t \mapsto n \exp(-n - t)$.

1. La suite (g_n) converge-t-elle simplement sur \mathbb{R}^+ vers une limite g ?

2. La fonction g est-elle dérivable ?

3. Pour $n \geq 1$, g_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.

4. A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $g'(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'_n(t)$?

IV. Pour aller plus loin

Exercice 15 ☆☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto e^{-\frac{nt}{n+1}}$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) .
2. Etudier la convergence uniforme sur tout segment du type $[a, b]$.
3. A-t-on convergence uniforme sur \mathbb{R} ?

Exercice 16 ☆☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $J_n = \int_{[0,1]} t^n(1-t)^n dt$;
prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$;

Exercice 17 ☆☆☆ CCP PSI 2010

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Etudier l'intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{\text{Arctan } t}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, existence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{t^{3/2} + t^n} dt.$$

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite (I_n) .

Exercice 18 ☆☆☆

Soit $A > 0$, et $I = [0, A] \subset \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. En utilisant l'inégalité $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ valable sur \mathbb{R}^+ , montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle, notée $\tilde{0}$.
2. Retrouver ce résultat en majorant $|f_n(x) - \tilde{0}(x)|$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 19 ☆☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \sqrt{n} \sin x (\cos x)^n$.

1. Existence et calcul de $\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt$.

2. Existence et calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Exercice 20 ☆☆☆ lemme de Riemann-Lebesgue

Soit h une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H_m = \int_\alpha^\beta h(t)e^{imt} dt$.

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\lim_{m \rightarrow +\infty} H_m = 0$

Exercice 21 ☆☆☆

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$.

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0, \pi]$ vers une limite f ?
2. La fonction f est-elle dérivable ?
3. Pour $n \geq 1$, f_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in [0, \pi]$, $f'(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(t)$?

Exercice 22 ☆☆☆

Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : t \mapsto n \exp(-n-t)$.

1. La suite (g_n) converge-t-elle simplement sur \mathbb{R}^+ vers une limite g ?
2. La fonction g est-elle dérivable ?
3. Pour $n \geq 1$, g_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $g'(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'_n(t)$?

Notes

² correction : DL1 $\ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) = \frac{t}{n} + O(n^{-2})$

¹⁵ correction : IAF $|f_n(t) - e^t| \leq e^b |t/(n+1)|$

¹⁹ correction : Par calcul direct de primitive, on a $\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0$

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$ $f_n(t) \rightarrow 0$, donc CVS vers $\tilde{0}$.

$$f_n(\arctan(1/\sqrt{n})) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)/2} \rightarrow e^{-1/2} \neq 0 \text{ pas de CVU!}$$