

## I. Applications directes du cours

### Exercice 1 ☆☆

Dans  $\mathbb{R}^3$  pour la norme  $\| \cdot \|$  euclidienne usuelle, dessiner la boule fermée de centre  $\Omega(1, 1, 0)$  et de rayon 2.

### Exercice 2 ☆☆

Dans  $\mathbb{R}^3$  pour la norme  $\| \cdot \|$  euclidienne usuelle, calculer la distance du point  $A(1, -1, 1)$  au plan d'équation  $x + z = 0$ .

## II. A savoir rédiger

### Exercice 3 ☆☆

Justifier que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y^2\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 4 ☆☆

Justifier que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 1 + y\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

## III. Exercices

### Exercice 5 ☆☆

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives  $\delta_1, \dots, \delta_n$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable telle que  $X' = AX$ .

- Décomposer  $X$  dans une base orthonormée  $(e'_1, \dots, e'_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .
- Justifier que pour les fonctions coordonnées  $(x_i)$  correspondantes, on a :  $\forall t, \sum_{i=1}^n x'_i(t)x_i(t) \geq 0$
- En déduire une expression de la fonction  $t \mapsto \|X(t)\|_2$  est croissante sur  $I$ .

### Exercice 6 ☆☆☆ Fermé

Justifier que  $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); \det(M) = 0\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

### Exercice 7 ☆☆☆ CCINP PC 2018

On étudie

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}.$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(x, y) \in E$ .
- Montrer que  $E$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

## IV. Pour aller plus loin

### Exercice 8 ☆☆☆

Soient  $F$  une partie fermée non vide d'un espace normé  $E$  et  $x \in E$ .

On note  $d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\}$

1. si  $x \in F$ , justifier que  $d(x, F) = 0$
2. Supposons que  $d(x, F) = 0$

(a) justifier l'existence d'une suite  $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

- (b) Montrer que la suite  $y_n$  est convergente, vers une limite que l'on précisera.
  - (c) En utilisant le fait que  $F$  est une partie fermée, montrer que  $x \in F$ .
3. En déduire que

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

### Exercice 9 ☆☆☆☆

On suppose que  $A$  est une partie convexe d'un espace vectoriel normé  $E$ .

1. (a) Soient  $a \in \bar{A}$  et  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim a_n = a$ , et  $b \in \bar{A}$  et  $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim b_n = b$   
Montrer que pour tout scalaire  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \bar{A}$

(b) En déduire que  $\bar{A}$  est convexe.

2. (a) Soient  $a, b \in A^\circ$ , et  $r_a, r_b > 0$  tels que  $B(a, r_a) \subset A$  et  $B(b, r_b) \subset A$ .  
En notant  $r = \min(r_a, r_b)$ , justifier que pour tout  $x \in B(\lambda a + (1 - \lambda)b, r)$ , il existe  $u \in B(0, 1)$  tel que :

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b + ru$$

(b) En remarquant que  $a' = a + ru \in A$  et que  $b' = b + ru \in A$ , justifier que le segment  $[a', b'] = \{ta' + (1 - t)b'; t \in [0, 1]\}$  est contenu dans  $A$ .

(c) En déduire que  $x \in A$

(d) En déduire que  $B(\lambda a + (1 - \lambda)b, r) \subset A$

(e) La partie  $A^\circ$  est-elle convexe ?

## V. Pour aller encore plus loin

### Exercice 10 ☆☆☆ fonctions höldériennes

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ . Soit  $h : E \rightarrow E$  telle qu'il existe  $\alpha > 0$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in E^2, \|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha$ . Montrer que  $h$  est continue sur  $E$ .

### Exercice 11 ☆☆☆

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e. v. n.,  $a$  et  $b$  deux vecteurs non nuls de  $E$ , et pour tout  $t$  réel,  $f(t) = \|at + b\|$ ;

a) prouver que  $f$  est continue et lipschitzienne;

b) prouver que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f = +\infty$ ;

c) Prouver que l'ensemble des réels  $t$  tels que  $at + b$  appartienne à la boule unité ouverte est soit vide soit un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 12 ☆☆☆ CCINP MP

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme associée. On dit qu'une suite  $(x_n)$  converge fortement vers  $x$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$  ( $x_n$ ) converge faiblement vers  $x$  si  $\forall y \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$

1) a) Montrer que si  $(x_n)$  converge faiblement, sa limite est unique.

b) Montrer que convergence forte implique convergence faible

2) Montrer que  $(x_n)$  converge fortement vers  $x \iff (x_n)$  converge faiblement vers  $x$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$

3) Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

## Notes

<sup>1</sup> correction : Utiliser la définition de boule fermée