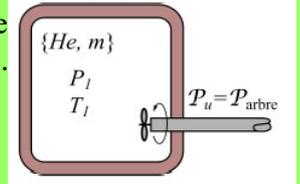


**1. Utilisation d'un agitateur**

Un réservoir rigide et adiabatique (calorifugé) contient  $m=1\text{kg}$  d'hélium à la température  $T_1=300,0\text{K}$  et à la pression  $P_1=300,0\text{ kPa}$ . L'hélium est brassé à l'aide d'un agitateur de puissance utile  $P=15\text{W}$ . On le fait fonctionner pendant  $\tau=30\text{min}$ . Déterminer la température finale  $T_2$  et la pression finale  $P_2$  de l'hélium.

Données: chaleur massique à volume constant de l'hélium:  $c_v=3,1156\text{ kJ.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

Rép :  $T_2=308,7\text{K}$ ;  $P_2=308,7\text{ kPa}$



**Solution**

Dans cet exercice intervient un travail autre que le travail des forces de pression.

Le gaz subit :

- une transformation adiabatique d'où  $Q=0$
- à volume constant donc le travail des forces de pression  $W_p=0$

D'après le premier principe (sans variation d'énergie cinétique :  $\Delta U = W_p + W_{autre} + Q = W_{autre}$  .

Le système est un gaz parfait donc  $\Delta U = m c_v (T_2 - T_1)$

$W_{autre} = P \tau$  d'où d'après le 1er principe :  $m c_v (T_2 - T_1) = P \tau$

$$T_2 = T_1 + \frac{P \tau}{m c_v} = 308,7 \text{ K} ;$$

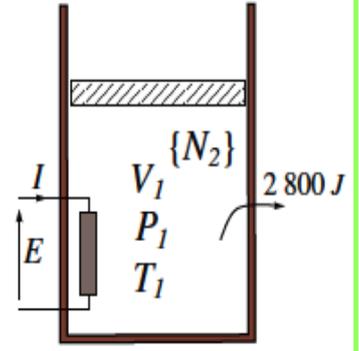
Pour déterminer la pression finale, on exprime l'équation d'état à l'état initial et à l'état final soit :

$P_1 V = n R T_1$  et  $P_2 V = n R T_2$  d'où en faisant le rapport des deux expressions :

$$P_2 = \frac{T_2}{T_1} P_1 = 308,7 \text{ KPa}$$

## 2. Chauffage à l'aide d'une résistance-fuites thermiques

Un cylindre surmonté d'un piston mobile contient  $V_1=0,5 \text{ m}^3$  de diazote à la pression  $P_1=400 \text{ kPa}$  et à la température  $\theta_1=27^\circ\text{C}$ . Une résistance chauffante se trouve au contact du gaz comme indiqué sur la figure ci-contre. Elle est allumée et un courant  $I=2\text{A}$  y circule pendant une durée  $\tau = 5\text{min}$  sous la tension  $E=120\text{V}$ . Le diazote se détend alors de manière isobare.



Au cours de cette transformation, suite à des fuites thermiques, l'ensemble {gaz, cylindre, résistance} cède à l'extérieur un transfert thermique  $Q_{\text{ext}}=2800\text{J}$ .

En considérant que le cylindre et la résistance n'emmagasinent pas de chaleur, déterminer la température finale  $\theta_2$  du diazote après la durée  $\tau$  de fonctionnement de la résistance.

Données: masse molaire de l'azote :  $M(N)=14,0 \text{ g.mol}^{-1}$ , chaleur massique du diazote à pression constante:  $c_p=1,039 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ , Constante des gaz parfaits :  $R=8,314 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $T(\text{K})=\theta^\circ\text{C}+273,15$ . Rép :  $\theta_2 = 57^\circ\text{C}$

### Solution

On applique le 1er principe au diazote pour une transformation isobare:  $\Delta H=Q=m c_p \Delta T$  (1) avec  $Q=Q_{\text{chauffage}}+Q_{\text{fuites}}$ .

$$Q_{\text{chauffage}}=U I \tau ; Q_{\text{fuites}}=-2800 \text{ J} . \text{ De plus } P_1 V_1=\frac{m}{M} R T_1 \text{ d'où } m=\frac{P_1 V_1 M}{R T_1}$$

$$\text{D'après (1) on en déduit : } \frac{P_1 V_1 M}{R T_1} c_p (\theta_2 - \theta_1) = U I \tau - 2800 \text{ d'où } \theta_2 = \frac{R T_1}{P_1 V_1 M c_p} (U I \tau - 2800) + \theta_1$$

$$\text{AN : } \theta_2 = \frac{8,314 \times 300,15}{400 \cdot 10^3 \times 0,5 \times 28 \cdot 10^{-3} \times 1039} (120 \times 2 \times 5 \times 60 - 2800) + 27 = 56,7 \approx 57^\circ\text{C}$$

### 3. Cycle de Lenoir

On considère une mole de gaz parfait de coefficient  $\gamma$  constant. Ce gaz est dans un état initial A caractérisé par  $(P_0, V_0$  et  $T_0)$ . On lui fait subir les transformations réversibles suivantes:

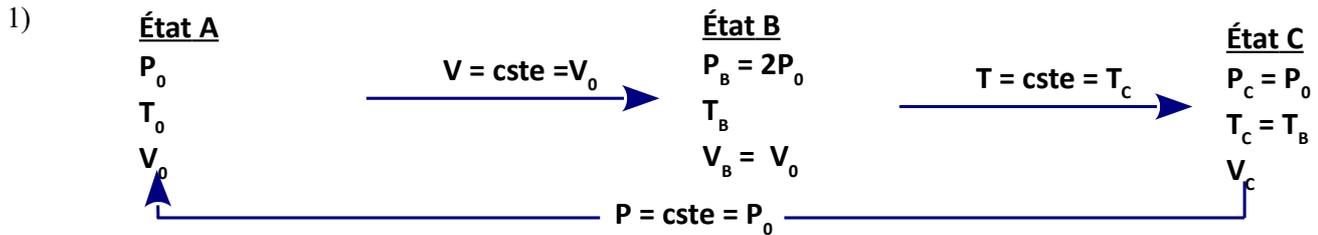
- A  $\rightarrow$  B : Compression isochore  $P_B = 2P_0$
- B  $\rightarrow$  C : Détente isotherme
- C  $\rightarrow$  A : Refroidissement isobare

1) Exprimer en fonction de  $T_0$  et  $V_0$  la température de l'isotherme ainsi que le volume  $V_C$ .

2) Tracer le cycle dans le diagramme de Clapeyron

3) Exprimer en fonction de  $\gamma$ , R et  $T_0$  pour chaque transformation : Le travail reçu par le gaz, le transfert thermique reçu par le gaz, la variation d'énergie interne et la variation d'enthalpie.

#### Solution



On applique l'équation d'état en A :  $P_0 V_0 = RT_0$  puis en B :  $2 P_0 V_0 = RT_B$  on en déduit que  $T_B = 2 T_0$ .

On applique l'équation d'état en C :  $P_0 V_C = 2 R T_0$  on en déduit  $V_C = 2 V_0$ .

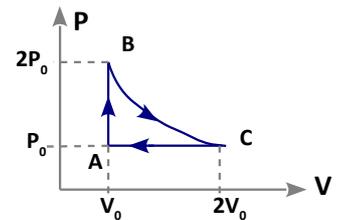
2) **Ci-contre**

3) **Transformation AB :**

**La transformation est isochore réversible donc :**  $W_{AB} = 0$

et  $Q_{AB} = \Delta U_{AB} = C_{vm} \Delta T = \frac{R}{\gamma - 1} (T_B - T_C)$  d'où :  $Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{R T_0}{\gamma - 1}$

$$\Delta H_{AB} = \gamma \Delta U_{AB} = \frac{\gamma R T_0}{\gamma - 1}$$



**Transformation BC :**

**La transformation est isotherme réversible donc :**  $\delta W_{BC} = -P_{ext} dV = -P dV = -\frac{RT_0}{V} dV$  d'où

$$W_{BC} = -2RT_0 \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} \text{ d'où : } W_{BC} = -2R T_0 \ln 2$$

De plus,  $\Delta U = C_{vm} \Delta T = 0 = W_{BC} + Q_{BC}$  donc  $Q_{BC} = -W_{BC} = 2 R T_0 \ln 2$  et  $\Delta H = C_{pm} \Delta T = 0$

**Transformation CA :**

**La transformation est isobare donc**  $Q_{CA} = \Delta H_{CA} = C_{pm} \Delta T = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_A - T_C)$  d'où  $Q_{CA} = \Delta H_{CA} = \frac{-R\gamma T_0}{\gamma - 1}$

$\delta W_{CA} = -P_{ext} dV = -P_0 dV$  donc  $W_{CA} = -P_0 (V_A - V_C) = P_0 V_0$  donc  $W_{AB} = R T_0$

$$\Delta U_{CA} = \frac{\Delta H_{CA}}{\gamma} = \frac{-R T_0}{\gamma - 1}$$

#### 4. Cycle Beau de Rochas

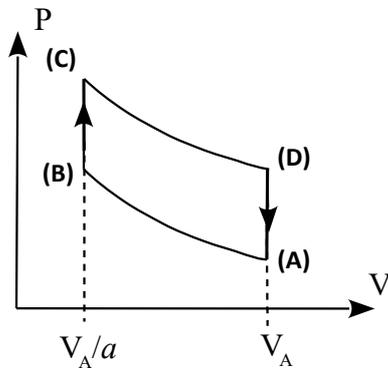
Le cycle du moteur à 4 temps , de rapport de compression  $a$  peut être représenté théoriquement par le cycle Beau de Rochas . Ce cycle effectué par  $n$  moles d'un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  est décrit ci-dessous :

- (1) Compression adiabatique quasi-statique de l'état A à l'état B de  $(V_0, T_A)$  à  $\left(\frac{V_0}{a}, T_B\right)$
  - (2) Échauffement isochore réversible de l'état B à l'état C où le gaz reçoit le transfert thermique  $Q_1$ . Il atteint la température  $T_C$ .
  - (3) Détente adiabatique quasi-statique de l'état C à l'état D de volume  $V_0$  (la température est alors  $T_D$ )
  - (4) Un refroidissement isochore réversible de l'état D à l'état A au cours duquel le gaz reçoit le transfert thermique  $Q_2$ .
1. Énoncer la loi de Laplace.
  2. Représenter l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron (P,V) .
  3. Pour chaque transformation exprimer le transfert thermique et le travail reçus par le gaz en fonction des différentes températures ,  $n$  R et  $\gamma$ , regrouper les résultats dans un tableau.
  4. Exprimer la température  $T_B$  en fonction de  $T_A$ ,  $a$  et  $\gamma$  puis la température  $T_C$  en fonction de  $T_D$ ,  $a$  et  $\gamma$ .
  5. Déterminer le rendement du cycle  $\eta = \frac{|W_{cycle}|}{Q_{BC}}$  en fonction de  $Q_{BC}$  et  $Q_{DA}$  puis en fonction de  $a$  et  $\gamma$  supposé constant.

#### Solution

1. Loi de Laplace : quand un gaz parfait subit une transformation adiabatique réversible :  $PV^\gamma = cst$ .

2. Cycle (ci-contre)



3.

	W	Q
AB	$W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_B - T_A)$	0 car adiabatique
BC	0 car isochore	$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_C - T_B)$
CD	$W_{CD} = \Delta U_{CD} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_D - T_C)$	0 car adiabatique
DA	0 car isochore	$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_D)$

4. La transformation AB est adiabatique réversible on peut appliquer la loi de Laplace relative au variables T et V :

$$TV^{\gamma-1} = cste = T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \text{ d'où : } T_B = T_A \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} = T_A (a)^{\gamma-1}$$

Le raisonnement est le même qu'à la question précédente :  $T_C = T_D (a)^{\gamma-1}$ .

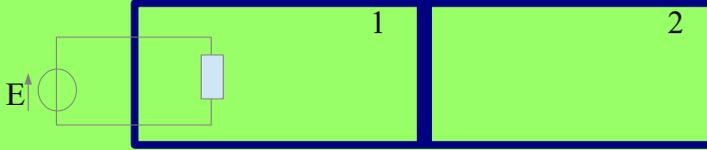
5. D'après le 1er principe :  $\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle}$  or U est une fonction d'état donc  $\Delta U_{cycle} = 0$  d'où :

$$\eta = \frac{|W_{cycle}|}{Q_{BC}} = \frac{-W_{cycle}}{Q_{BC}} = \frac{Q_{cycle}}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} \text{ d'où : } \eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} \text{ . D'où } \eta = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} \text{ en remplaçant } T_C \text{ et } T_B, \text{ on}$$

obtient :  $\eta = 1 - a^{1-\gamma}$

## 5. Chauffage d'un gaz

On considère un réservoir à parois adiabatiques séparés en deux parties par un piston adiabatique et mobile sans frottements. Initialement, chaque compartiment contient une mole de gaz parfait ( $\gamma = 1,4$ ) à la pression  $P_0 = 10^5$  Pa et à la température  $T_0 = 290$  K. On prendra  $R = 8,314$  SI.



Grâce à une résistance électrique, on chauffe lentement le gaz 1 dans le compartiment de gauche jusqu'à la pression  $P = 2P_0$ .

- 1) Déterminer l'état du gaz dans chacun des deux compartiments.
- 2) Calculer l'énergie thermique apportée au gaz de gauche par l'intermédiaire de la résistance, ainsi que le travail échangé entre les deux gaz.

Rep: 1)  $T_{f1} = 806$  K,  $T_{f2} = 353$  K,  $V_{f1} = 33,5$  L ; 2)  $W_2 = 1320$  J,  $Q_1 = 12055$  J.

### Solution

1) Le gaz contenu dans le compartiment 1 subit un chauffage lent (attention sa transformation n'est pas adiabatique !)

État initial 1		État final 1
$P_0$	→	$P_{F1} = 2P_0$
$T_0$		$T_{F1}$
$V_0$		$V_{F1}$

Le gaz contenu dans le compartiment 2 subit une transformation adiabatique lente, que l'on met supposée mécaniquement réversible.

État initial 2		État final 2
$P_0$	→	$P_{F2} = 2P_0$
$T_0$		$T_{F2}$
$V_0$		$V_{F2}$

On applique la loi de Laplace au gaz dans le compartiment 2 en utilisant les paramètres adaptés cad T et P :

$$T_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_{F2} (2P_0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \text{d'où} \quad T_{F2} = T_0 \left( \frac{P_0}{2P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 (2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{AN : } T_{F2} = 353 \text{ K}$$

On utilise ensuite l'équation d'état dans l'état final au compartiment 2 pour déterminer  $V_{F2}$  :  $V_{F2} = \frac{RT_{F2}}{2P_0}$ .

AN :  $V_{F2} = 14,7 \text{ L}$ .

On utilise la conservation du volume pour déterminer  $V_{F1}$ .  $2V_0 = V_{F1} + V_{F2}$  Soit  $V_{F1} = 2V_0 - V_{F2}$ . On exprime  $V_0$  grâce à l'équation d'état dans l'état initial d'un des deux compartiments si bien que :

$$V_{F1} = \frac{2RT_0}{P_0} - V_{F2} \quad \text{AN : } V_{F1} = 33,5 \text{ L}$$

Pour déterminer  $T_{F1}$ , on applique l'équation d'état au compartiment 1 dans l'état final :  $T_{F1} = \frac{2P_0 V_{F1}}{R}$ .

AN :  $T_{F1} = 806 \text{ K}$ .

2) On applique le 1er principe au système constitué par les deux gaz :  $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = W + Q$ . Le volume du système est constant donc  $W=0$ .

$Q = Q_1 + Q_2$ ,  $Q_2 = 0$  car le gaz dans le compartiment 2 subit une transformation adiabatique.  $Q_1$  est le transfert thermique cherché.

Les deux gaz sont parfaits donc :  $\Delta U_1 = C_{Vm}(T_{F1} - T_0)$  et  $\Delta U_2 = C_{Vm}(T_{F2} - T_0)$

Or on sait que  $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$  (1) et  $C_{Pm} - C_{Vm} = R$  (2).

De (1) on tire  $C_{Pm} = \gamma C_{Vm}$ . En remplaçant dans (2) on obtient :  $\gamma C_{Vm} - C_{Vm} = R$  d'où :  $C_{Vm} = \frac{R}{(\gamma - 1)}$

Finalemment :  $\Delta U = Q_1 = \frac{R}{(\gamma - 1)}(T_{F1} - T_0) + \frac{R}{(\gamma - 1)}(T_{F2} - T_0) = 12,1 \text{ kJ}$ .

Le travail  $W$  reçu par l'ensemble des deux gaz est nul, or  $W = W_1 + W_2$ . On en déduit que  $W_1 = -W_2$ . Il suffit de calculer l'un des deux travaux pour connaître l'autre.

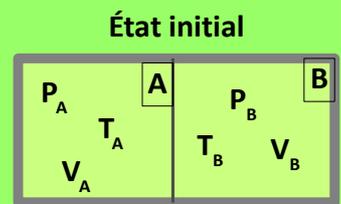
Le plus simple est de calculer  $W_2$  en appliquant le premier principe au gaz 2 :  $\Delta U_2 = W_2 + Q_2 = W_2$  d'où

$$W_2 = \frac{R}{(\gamma - 1)}(T_{F2} - T_0) = 1,32 \text{ kJ}$$

## 6. Deux situations de gaz dans un cylindre

Chaque question s'accompagne d'un choix de réponses. Il faudra indiquer la réponse choisie après une justification rigoureuse.

Deux réservoirs A et B aux parois indéformables contiennent de l'azote, dont on suppose qu'il se comporte comme un gaz parfait. Les mesures de la pression, de la température et du volume de l'azote dans chaque réservoir donnent les résultats ci-contre :



	Réservoir A	Réservoir B
Pression ( Pa )	1.10 <sup>4</sup>	3.10 <sup>4</sup>
Température ( °C )	27	47
Volume ( m <sup>3</sup> )	17,8	9,5

On donne  $\gamma = c_p / c_v = 1,4$  ;  $c_p$  et  $c_v$  désignent respectivement les chaleurs massiques de l'azote à pression et à volume constants. La masse molaire de l'azote est  $M(N_2) = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

1. Calculer les masses  $m_A$  et  $m_B$  d'azote contenu dans les réservoirs A et B.

a )  $m_A = 1,2 \text{ kg}$  ;      b )  $m_A = 2 \text{ kg}$  ; c )  $m_B = 4,1 \text{ kg}$  ;      d )  $m_B = 3 \text{ kg}$ .

2. Après la mise en communication des deux réservoirs, un équilibre s'instaure pour une pression  $P_e = 1,66 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ . Calculer la température  $\theta_e$  à l'équilibre en degré Celsius.

a )  $\theta_e = 45^\circ\text{C}$  ;      b )  $\theta_e = 32,5^\circ\text{C}$  ;      c )  $\theta_e = 24^\circ\text{C}$  ;      d )  $\theta_e = 19,5^\circ\text{C}$ .

3. La mise en communication des deux réservoirs se fait sans mise en jeu de travail. Calculer le transfert thermique  $Q$  reçu par le gaz au cours de cette opération.

a )  $Q = 12 \text{ kJ}$  ; b )  $Q = 18 \text{ kJ}$  ; c )  $Q = -24,5 \text{ kJ}$  ;      d )  $Q = -35 \text{ kJ}$ .

4. On renouvelle l'expérience dans des conditions différentes : on fait en sorte que

l'ensemble des deux réservoirs soit parfaitement calorifugé ; le gaz constitue alors un système thermodynamiquement isolé. Déterminer en degré Celsius la température  $\theta_e'$  pour laquelle s'établit l'équilibre, après mise en communication des deux réservoirs.

a )  $\theta_e' = 26^\circ\text{C}$  ;      b )  $\theta_e' = 30^\circ\text{C}$  ;      c )  $\theta_e' = 33^\circ\text{C}$  ;      d )  $\theta_e' = 39^\circ\text{C}$ .

### Solution

1. Dans le compartiment A :  $P_A = 10^4 \text{ Pa}$  ;  $T_A = 300,15 \text{ K}$  ;  $V_A = 17,8 \text{ m}^3$ . Pour déterminer la masse  $m_A$  de gaz il

suffit d'appliquer l'équation d'état sous la forme :  $P_A V_A = \frac{m_A}{M} R T_A$  soit  $m_A = \frac{M P_A V_A}{R T_A} = 2 \text{ kg}$ . **Rep b**

La démarche est la même pour trouver  $m_B$ . On trouve  $m_B = \frac{M P_B V_B}{R T_B} = 3 \text{ kg}$ . **Rep d**

2. On écrit la conservation de la matière entre l'état initial et l'état final :  $n_A + n_B = n_{tot}$ . On remplace ensuite les

nombre de mole grâce à l'équation d'état :  $\frac{P_A V_A}{R T_A} + \frac{P_B V_B}{R T_B} = \frac{P_e (V_A + V_B)}{R T_e}$ .

On tire de cette expression en simplifiant par R :

$$T_e = \frac{P_e (V_A + V_B)}{\frac{P_A V_A}{T_A} + \frac{P_B V_B}{T_B}} = 305,4 \text{ K}$$

D'où  $\theta_e = 305,4 - 275 \approx 32,5^\circ\text{C}$ . **Rep b**

3. On applique le 1er principe au système constitué par l'ensemble des deux gaz.  $\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = W + Q$  (1).

$W = W_p + W_{autre}$ ,  $W_p = 0$  car le volume du système est constant,  $W_{autre} = 0$  car l'énoncé dit que la mise en communication se fait sans mise en jeu de travail. De (1) on tire  $Q = \Delta U_A + \Delta U_B$

Les gaz sont parfaits et identiques dans les deux compartiments donc :

$$\Delta U_A = m_A c_V (T_e - T_A) \text{ et } \Delta U_B = m_B c_V (T_e - T_B). \text{ Or on sait que } \gamma = \frac{c_P}{c_V} \text{ (2) et } c_P - c_V = \frac{R}{M} \text{ (3).}$$

De (2) on tire  $c_P = \gamma c_V$ . En remplaçant dans (3) on obtient :  $\gamma c_V - c_V = \frac{R}{M}$  d'où :  $c_V = \frac{R}{M(\gamma - 1)}$

Finalement :  $Q = m_A \frac{R}{M(\gamma - 1)} (T_e - T_A) + m_B \frac{R}{M(\gamma - 1)} (T_e - T_B) = \frac{R}{M(\gamma - 1)} (m_A (T_e - T_A) + m_B (T_e - T_B))$

On peut donner l'expression du résultat avec les différences de températures en °C :

$$Q = \frac{R}{M(\gamma - 1)} (m_A (\theta_e - \theta_A) + m_B (\theta_e - \theta_B)) = -24 \text{ kJ} \quad \text{Rep c}$$

4. On applique le 1er principe au système constitué par l'ensemble des deux gaz.  $\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = W + Q$ .  
 $W = 0$ ,  $Q = 0$  car le système est thermiquement isolé. Donc  $\Delta U_A + \Delta U_B = 0$ . On utilise les expressions

précédentes en remplaçant  $\theta_e$  par  $\theta'_e$  d'où  $\frac{R}{M(\gamma - 1)} (m_A (\theta'_e - \theta_A) + m_B (\theta'_e - \theta_B)) = 0$  d'où :

$$\theta'_e = \frac{m_A \theta_A + m_B \theta_B}{m_A + m_B} = 39 \text{ } ^\circ \text{C} \quad \text{Rep d}$$