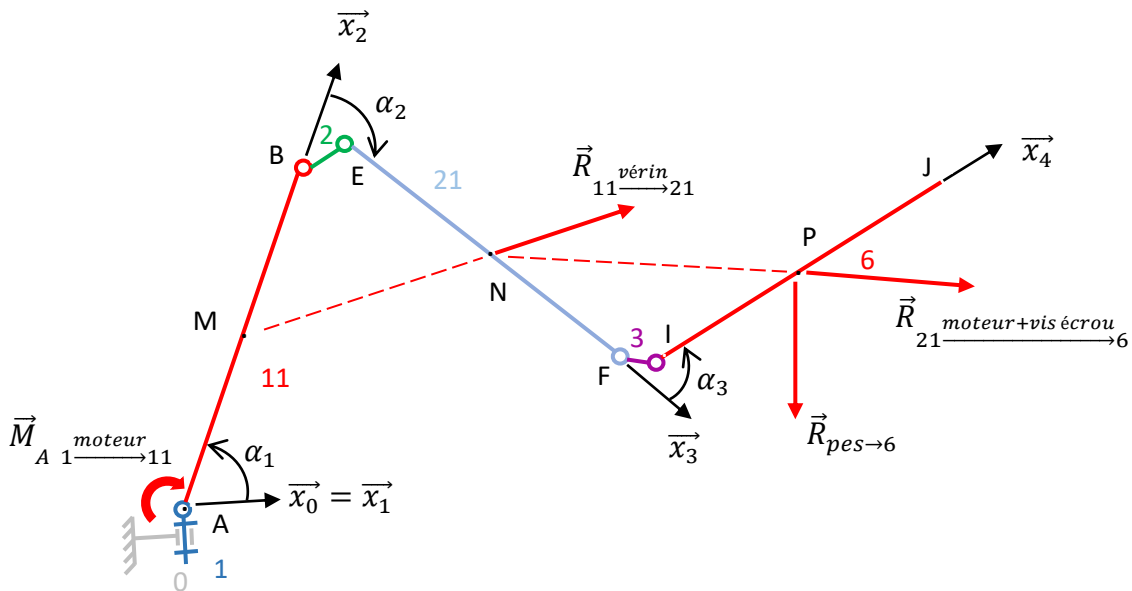


1. Proposer un graphe de structure de la lampe sans considérer la rotation du solide (1) par rapport à (0) et en considérant {4,5,6} comme un seul solide.

Bien réalisé par tous les élèves

2. Faire apparaître les actions mécaniques des trois actionneurs et de la pesanteur sur le schéma cinématique. Faire apparaître également les paramètres angulaires.



3. Ecrire le torseur de l'action mécanique de pesanteur.

$$\{T_{pes \rightarrow 6}\} = \begin{cases} -M_6 \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}_P$$

4. Ecrire les différents torseurs des actions mécaniques de liaison entre 1 et 11, entre 2 et 21 puis entre 3 et {4,5,6}.

$$\{T_{1 \rightarrow 11}\} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 11} \cdot \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 11} \cdot \vec{y}_1 + Z_{1 \rightarrow 11} \cdot \vec{z}_1 \\ L_{A, 1 \rightarrow 11} \cdot \vec{x}_1 + N_{A, 1 \rightarrow 11} \cdot \vec{z}_1 \end{cases}_A$$

$$\{T_{2 \rightarrow 21}\} = \begin{cases} X_{2 \rightarrow 21} \cdot \vec{x}_3 + Y_{2 \rightarrow 21} \cdot \vec{y}_3 + Z_{2 \rightarrow 21} \cdot \vec{z}_3 \\ L_{E, 2 \rightarrow 21} \cdot \vec{x}_3 + N_{E, 2 \rightarrow 21} \cdot \vec{z}_3 \end{cases}_E$$

$$\{T_{3 \rightarrow \{4,5,6\}}\} = \begin{cases} X_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + Y_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{y}_4 + Z_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \\ L_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + N_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \end{cases}_I$$

**5. Proposer un isolement permettant de déterminer l'effort  $F_2$  du moteur 2+ vis-écrou, nécessaire pour maintenir le système à l'équilibre. Déterminer l'expression de cet effort.**

On isole  $\{4,5,6\}$ .  $\{4,5,6\}$  soumit à 3 actions mécaniques :

- action de la pesanteur :  $\left\{ T_{pes \rightarrow \{4,5,6\}} \right\} = \begin{cases} -M_6 \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$
- action de la liaison pivot en I :  $\left\{ T_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \right\} = \begin{cases} X_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + Y_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{y}_4 + Z_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \\ L_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + N_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \end{cases}$
- action du moteur + vis-écrou :  $\left\{ T_{21 \xrightarrow{\text{moteur+vis écrou}} \{4,5,6\}} \right\} = \begin{cases} F_2 \cdot \frac{\overline{NP}}{\|\overline{NP}\|} \\ \vec{0} \end{cases}$

Afin de déterminer l'axe des efforts du moteur+ vis-écrou, déterminons  $\overline{NP}$  et  $\|\overline{NP}\|$  :

$$\overline{NP} = \overline{NF} + \overline{FI} + \overline{IP} \approx \overline{NF} + \overline{IP} = \frac{l_4}{2} \vec{x}_3 + \frac{l_5}{2} \vec{x}_4 = \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) \vec{x}_4 - \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{z}_4$$

$$\|\overline{NP}\| = \sqrt{\left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right)^2 + \left( \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \right)^2} = K(\alpha_3)$$

On a finalement :

$$\left\{ T_{21 \xrightarrow{\text{moteur+vis écrou}} \{4,5,6\}} \right\} = \begin{cases} \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) \vec{x}_4 - \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{z}_4 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Afin de réaliser le PFS en moment au point I (ce qui permet de ne pas avoir dans l'équation d'inconnues de liaisons), déplaçons le torseur de la vis-écrou et de la pesanteur :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{I, pes \rightarrow \{4,5,6\}} &= \vec{M}_{P, pes \rightarrow \{4,5,6\}} + \overline{IP} \wedge -M_6 \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \\ &= \vec{0} + \frac{l_5}{2} \vec{x}_4 \wedge -M_6 \cdot g (\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{z}_4 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{x}_4) \\ &= \frac{l_5}{2} M_6 \cdot g \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{y}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{I, 21 \xrightarrow{\text{moteur+vis écrou}} \{4,5,6\}} &= \vec{M}_{P, 21 \xrightarrow{\text{moteur+vis écrou}} \{4,5,6\}} + \overline{IP} \wedge \left( \frac{F_2}{K} \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) \vec{x}_4 - \frac{F_2}{K} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{z}_4 \right) \\ &= \vec{0} + \frac{l_5}{2} \vec{x}_4 \wedge \left( \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) \vec{x}_4 - \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{z}_4 \right) \\ &= \frac{l_5}{2} \cdot \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{y}_4 \end{aligned}$$

On a alors les trois torseurs suivants au point I :

$$\begin{aligned} \{T_{pes \rightarrow \{4,5,6\}}\} &= \begin{cases} -M_6 \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \\ \frac{l_5}{2} M_6 \cdot g \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{y}_4 \end{cases} \\ \{T_{3 \rightarrow \{4,5,6\}}\} &= \begin{cases} X_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + Y_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{y}_4 + Z_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \\ L_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + N_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \end{cases} \\ \{T_{21 \xrightarrow{\text{moteur+vis écrou}} \{4,5,6\}}\} &= \begin{cases} \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) \vec{x}_4 - \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{z}_4 \\ \frac{l_5}{2} \cdot \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{y}_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Appliquons le PFS en moment en I suivant l'axe  $\vec{y}_4$  :

$$\frac{l_5}{2} M_6 \cdot g \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 0 + \frac{l_5}{2} \cdot \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) = 0$$

Donc :

$$F_2 = \frac{2 \cdot K(\alpha_3) \cdot M_6 \cdot g \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{l_4 \cdot \sin(\alpha_3)}$$

**6. Définir la position qui nécessite l'effort max du moteur 2+ vis-écrou. Faire l'application numérique.**

Lorsque  $\alpha_3 = 0^\circ$  :

$$K(\alpha_3) = \sqrt{\left(\frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3)\right)^2 + \left(\frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2}\right)^2 + 0} = \frac{1}{2}(l_5 + l_4)$$

Donc :

$$F_{2 \max} = \frac{(l_5 + l_4) \cdot M_6 \cdot g \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{l_4 \cdot \sin(0^\circ)} = \infty$$

En robotique, on appelle ce type de position une singularité, il s'agit d'une position qui peut être atteinte mais qu'il n'est pas possible de quitter (à moins de fournir un effort infini...)

**7. En considérant un pas de vis  $p = 1 \text{ mm}$ , déterminer le couple maximale  $C_{2 \max}$  du moteur 2.**

D'après le cours :

$$|F_2| = \frac{2\pi}{p} |C_2| \Leftrightarrow |C_2| = \frac{p}{2\pi} |F_2|$$

Donc :

$$C_{2 \max} = \frac{p}{2\pi} F_{2 \max} = \infty$$

### 8. Déterminer les actions mécaniques au niveau de la liaison entre 3 et {4,5,6}. Analyser le résultat

Pour déterminer ces inconnues de liaison on peut écrire toutes les équations du PFS au point I, hormis celle que l'on a déjà utilisée. On écrit initialement les torseurs dans la base 4 :

$$\{T_{pes \rightarrow \{4,5,6\}}\}_I = \begin{cases} -M_6 \cdot g \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{x}_4 + M_6 \cdot g \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{z}_4 \\ \frac{l_5}{2} M_6 \cdot g \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{y}_4 \end{cases}$$

$$\{T_{3 \rightarrow \{4,5,6\}}\}_I = \begin{cases} X_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + Y_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{y}_4 + Z_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \\ L_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{x}_4 + N_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} \cdot \vec{z}_4 \end{cases}$$

$$\{T_{21 \xrightarrow{\text{moteur+vis écrou}} \{4,5,6\}}\}_I = \begin{cases} \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) \vec{x}_4 - \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{z}_4 \\ \frac{l_5}{2} \cdot \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) \vec{y}_4 \end{cases}$$

On a alors les équations suivantes (pas besoin de réécrire le moment suivant  $\vec{y}_4$  :

$$\text{Rés. svt } \vec{x}_4 : -M_6 \cdot g \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + X_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} + \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) = 0$$

$$\text{Rés. svt } \vec{y}_4 : 0 + Y_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} + 0 = 0 \rightarrow Y_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} = 0$$

$$\text{Rés. svt } \vec{z}_4 : M_6 \cdot g \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + Z_{3 \rightarrow \{4,5,6\}} - \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) = 0$$

$$\text{Moment svt } \vec{x}_4 : 0 + L_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} + 0 = 0 \rightarrow L_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} = 0$$

$$\text{Moment svt } \vec{z}_4 : 0 + N_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} + 0 = 0 \rightarrow N_{I, 3 \rightarrow \{4,5,6\}} = 0$$

On obtient finalement le torseur suivant (on note  $\alpha_{1+2+3}$  pour  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ):

$$\{T_{3 \rightarrow \{4,5,6\}}\}_I = \begin{cases} \left( M_6 \cdot g \cdot \sin(\alpha_{1+2+3}) - \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \left( \frac{l_5}{2} + \frac{l_4}{2} \cos(\alpha_3) \right) \right) \cdot \vec{x}_4 + \left( \frac{F_2}{K(\alpha_3)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_3) - M_6 \cdot g \cdot \cos(\alpha_{1+2+3}) \right) \cdot \vec{z}_4 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Le chargement du vérin et de la pesanteur étant dans le plan  $(O, \vec{x}_4, \vec{z}_4)$ , le chargement au niveau de la liaison pivot se retrouve alors lui aussi dans ce plan. De plus, un chargement dans le plan  $(O, \vec{x}_4, \vec{z}_4)$  avec des mouvements dans ce même plan créera des moments uniquement suivant  $\vec{y}_4$  (via le produit vectoriel). Vu que la liaison pivot ne peut pas encaisser de couple suivant cet axe, son torseur en moment au point I est donc nul.

**9. Proposer un isolement permettant de déterminer l'effort  $F_1$  du vérin nécessaire pour maintenir le système à l'équilibre. Déterminer l'expression de cet effort.**

On isole  $\{21,3,4,5,6\}$ .  $\{21,3,4,5,6\}$  soumis à 3 actions mécaniques :

$$\begin{aligned}
 - \text{ action de la pesanteur : } \{T_{pes \rightarrow \{4,5,6\}}\} &= \begin{cases} -M_6 \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \\
 - \text{ action de la liaison pivot en E : } \{T_{2 \rightarrow 21}\} &= \begin{cases} X_{2 \rightarrow 21} \cdot \vec{x}_3 + Y_{2 \rightarrow 21} \cdot \vec{y}_3 + Z_{2 \rightarrow 21} \cdot \vec{z}_3 \\ L_{E, 2 \rightarrow 21} \cdot \vec{x}_3 + N_{E, 2 \rightarrow 21} \cdot \vec{z}_3 \end{cases} \\
 - \text{ action du vérin : } \{T_{11 \xrightarrow{\text{vérin}} 21}\} &= \begin{cases} F_1 \cdot \frac{\overline{MN}}{\|\overline{MN}\|} \\ \vec{0} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Afin de déterminer l'axe des efforts du vérin, déterminons  $\overline{MN}$  et  $\|\overline{MN}\|$  :

$$\begin{aligned}
 \overline{MN} &= \overline{MB} + \overline{BE} + \overline{EN} \approx \overline{MB} + \overline{EN} = \frac{l_3}{2} \vec{x}_2 + \frac{l_4}{2} \vec{x}_3 = \frac{l_4}{2} (\vec{x}_2 + \vec{x}_3) \\
 &= \left( \frac{l_4}{2} (1 + \cos(\alpha_2)) \right) \vec{x}_3 - \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_2) \vec{z}_3
 \end{aligned}$$

$$\|\overline{NP}\| = \frac{l_4}{2} \sqrt{(1 + \cos(\alpha_2))^2 + (\sin(\alpha_2))^2} = K_2(\alpha_2)$$

On a finalement :

$$\{T_{11 \xrightarrow{\text{vérin}} 21}\} = \begin{cases} \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \left( \frac{l_4}{2} (1 + \cos(\alpha_2)) \right) \vec{x}_3 - \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_2) \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Afin de réaliser le PFS en moment au point E (ce qui permet de ne pas avoir dans l'équation d'inconnues de liaisons), déplaçons le torseur du vérin et de la pesanteur :

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{E, pes \rightarrow \{4,5,6\}} &= \vec{M}_{P, pes \rightarrow \{4,5,6\}} + \overline{EP} \wedge -M_6 \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \\
 &= \vec{0} + \left( l_4 \vec{x}_3 + \frac{l_5}{2} \vec{x}_4 \right) \wedge -M_6 \cdot g (\cos(\alpha_{1+2}) \vec{z}_3 + \sin(\alpha_{1+2}) \vec{x}_3) \\
 &= \left( \left( l_4 + \frac{l_5}{2} \cos(\alpha_3) \right) \vec{x}_3 + \frac{l_5}{2} \sin(\alpha_3) \vec{z}_3 \right) \wedge -M_6 \cdot g (\cos(\alpha_{1+2}) \vec{z}_3 + \sin(\alpha_{1+2}) \vec{x}_3) \\
 &= \left[ \left( l_4 + \frac{l_5}{2} \cos(\alpha_3) \right) M_6 \cdot g \cos(\alpha_{1+2}) + \frac{l_5}{2} \sin(\alpha_3) M_6 \cdot g \sin(\alpha_{1+2}) \right] \vec{y}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{E, 11 \xrightarrow{\text{vérin}} 21} &= \vec{M}_{N, 11 \xrightarrow{\text{vérin}} 21} + \overrightarrow{EN} \wedge \left( \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \left( \frac{l_4}{2} (1 + \cos(\alpha_2)) \right) \vec{x}_3 - \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_2) \vec{z}_3 \right) \\
 &= \vec{0} + \frac{l_4}{2} \vec{x}_3 \wedge \left( \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \left( \frac{l_4}{2} (1 + \cos(\alpha_2)) \right) \vec{x}_3 - \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \cdot \frac{l_4}{2} \sin(\alpha_2) \vec{z}_3 \right) \\
 &= \frac{l_4^2}{4} \cdot \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \sin(\alpha_2) \vec{y}_3
 \end{aligned}$$

Appliquons le PFS en moment en E suivant l'axe  $\vec{y}_3$  :

$$\left( l_4 + \frac{l_5}{2} \cos(\alpha_3) \right) M_6 \cdot g \cos(\alpha_{1+2}) + \frac{l_5}{2} \sin(\alpha_3) M_6 \cdot g \sin(\alpha_{1+2}) + 0 + \frac{l_4^2}{4} \cdot \frac{F_1}{K_2(\alpha_2)} \sin(\alpha_2) = 0$$

Donc :

$$F_1 = \frac{4 \cdot K_2(\alpha_2) \cdot M_6 \cdot g \left( \left( l_4 + \frac{l_5}{2} \cos(\alpha_3) \right) \cos(\alpha_{1+2}) + \frac{l_5}{2} \sin(\alpha_3) \sin(\alpha_{1+2}) \right)}{l_4^2 \cdot \sin(\alpha_2)}$$

**10. Définir la position qui nécessite l'effort le plus important du vérin. Faire l'application numérique.**

Lorsque  $\alpha_2 = 0^\circ$  :

$$K_2(\alpha_2) = \frac{l_4}{2} \sqrt{(1 + \cos(\alpha_2))^2 + (\sin(\alpha_2))^2} = \frac{l_4}{2} \sqrt{(1 + 1)^2 + (0)^2} = l_4$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 F_{1 \max} &= \frac{4 \cdot K_2(\alpha_2) \cdot M_6 \cdot g \left( \left( l_4 + \frac{l_5}{2} \cos(\alpha_3) \right) \cos(\alpha_{1+2}) + \frac{l_5}{2} \sin(\alpha_3) \sin(\alpha_{1+2}) \right)}{l_4^2 \cdot \sin(\alpha_2)} \\
 &= \frac{4 \cdot l_4 \cdot M_6 \cdot g \left( \left( l_4 + \frac{l_5}{2} \cos(\alpha_3) \right) \cos(\alpha_1) + \frac{l_5}{2} \sin(\alpha_3) \sin(\alpha_1) \right)}{l_4^2 \cdot \sin(0^\circ)} = \infty
 \end{aligned}$$

Il s'agit à nouveau d'une singularité du système.