Chapitre 24 - Variables aléatoires - Exercices

Vrai ou Faux ?

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur Ω.

i. Deux issues différentes peuvent correspondre à la même valeur de X.
ii. Deux valeurs de X différentes peuvent correspondre à la même issue.
iii. Si on a équiprobabilité sur Ω alors toutes les valeurs prises par X ont la même probabilité.
iv. Si toutes les valeurs prises par X ont la même probabilité, alors on a équiprobabilité sur Ω.
v. Si Y prend les mêmes valeurs que X alors $X = Y$.
vi. Si Y a la même loi de probabilité que X alors $X = Y$.
vii. Si $E(X) = E(Y)$ alors $X - Y$ est centrée.
viii. Si X est centrée alors X^2 aussi.
ix. Si X^2 est centrée alors X aussi.
x. Il est possible que $Z = (X, Y)$ suive une loi binomiale.

1 Pour commencer

Exercice n° 1

Une urne contient 10 boules indiscernable : 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard 3 boules de cette urne et on considère la variable aléatoire X qui est le nombre de couleurs différentes du tirage effectué.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice n° 2

Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est résumée par :

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$0,1$	$0,1$	$0,1$
1	$0,3$	$0,1$	0
2	0	$0,1$	$0,2$

.

1. Quelle est la probabilité de l'événement $(X \geq Y)$?
2. Donner les lois marginales de X et de Y.
3. X est-elle centrée ?
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice n° 3

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :
— si les deux boules tirées sont de couleur différentes, le joueur gagne la partie et remporte 5 euros ;
— le joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont blanches ;
— le joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont noires.

On note Y_k la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique d'un joueur qui joue une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y_k ?
2. Prouver que $\mathbb{P}(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
3. Donner la loi de probabilité de Y_k.
4. On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance de Y_k est strictement positive. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

2 Variables aléatoires de référence

Exercice n° 4

On s'intéresse à la production d'écrans OLED pour des téléviseurs haut de gamme. Un contrôle de qualité a lieu en fin de production pour chaque écran et on a établi statistiquement, que chaque écran a une probabilité de 80% d'être déclaré conforme et d'être directement acheminé chez le client.
Dans le cas où l'écran est non-conforme, une réparation est effectuée puis un second test de conformité est mené. La probabilité que la réparation ait été efficace est de 65%, l'écran rejoint alors le service d'expédition ; sinon il est recyclé.
On considère les événements :

- R : « une réparation est nécessaire » ;
- E : « l'écran est expédié ».

1. À l'aide d'un arbre de probabilités, déterminer $\mathbb{P}(E)$.
2. Le coût de production d'un écran en fin de chaîne est de 700 euros , une réparation occasionne un surcoût éventuel de 80euros et on estime que le recyclage d'un écran défectueux fournit pour 30euros de matières premières. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ le prix de vente d'un écran.
   On considère la variable aléatoire B qui représente le bénéfice algébrique réalisé pour un écran, c'est-à-dire la différence entre les recettes et les dépenses.
   (a) Donner la loi de probabilité de B.
   (b) Comment fixer p pour que cette production soit rentable ?
   (c) Un cadre commercial suggère de supprimer la phase de réparation en affirmant qu'elle est déficitaire, autrement dit qu'elle a un coût supérieur au bénéfice escompté. Il propose ainsi d'envoyer directement au recyclage les écrans qui sont non conformes à l'issu du premier test. A-t-il raison ?

Exercice n° 5

C'est mon premier jour en tant que gardien d'un bâtiment qui comporte 8 pièces. Je dispose d'un trousseau constitué de 9 clés : une clé spécifique à chaque pièce et un passe qui ouvre toutes les portes. Des étiquettes de couleurs différentes se trouvent sur chaque clé mais, malheureusement, on ne m'a pas indiqué à quoi correspondent les couleurs.
Je souhaite ouvrir la première porte. Soit N le nombre de clés essayées avant que la porte ne s'ouvre.

1. Déterminer la loi de N.
2. Déterminer l'espérance et la variance de N.

Exercice n° 6

D'après Concours G2E, 2014.

Une compagnie aérienne dispose d'une flotte constituée de deux types d'avions : des trimoteurs (un moteur situé en queue d'avion et un moteur sous chaque aile) et des quadrimoteurs (deux moteurs sous chaque aile). Tous les moteurs de ces avions sont susceptibles, durant chaque vol, de tomber en panne avec la même probabilité $x \in]0,1[$ et indépendamment les uns des autres. Toutefois, les trimoteurs peuvent achever leur vol si le moteur situé en queue ou si les deux moteurs d'ailes sont en état de marche et les quadrimoteurs le peuvent si au moins deux moteurs situés sous deux ailes distinctes sont en état de marche.

1. On note X_3 (respectivement X_4) la variable aléatoire correspondant au nombre de moteurs en panne sur un trimoteur (respectivement sur un quadrimoteur) durant un vol.
   (a) Quelles sont les lois suivies par X_3 et X_4 ?
   (b) Déterminer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs d'un trimoteur tombent en panne. Même question pour un quadrimoteur.
2. (a) On note T l'événement « le trimoteur achève son vol ». Démontrer que :
   $$\mathbb{P}(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$$
   (b) On note Q l'événement « le quadrimoteur achève son vol ». Déterminer une expression de $\mathbb{P}(Q)$ en fonction de x.
3. Quel avion est le plus sûr entre le trimoteur et le quadrimoteur ?

Exercice n° 7

Jérôme souhaite cultiver des papayes dans son jardin. Les papayers sont mâles (40 % des plants), femelles (45%) ou bisexués (15%) et il n'est pas possible de distinguer le genre d'un plant avant sa floraison. Les papayers femelles et bisexués portent des fruits, pas les papayers mâles.

1. Jérôme décide de planter un papayer. Quelle est la probabilité qu'il obtienne des papayes ?
2. Jérôme décide de planter cinq papayers. On appelle X le nombre de ces papayers qui pourront porter des fruits.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'aucun papayer ne porte de fruits ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'exactement trois papayers portent des fruits ?
3. Jérôme souhaite avoir une probabilité d'avoir des papayes d'au moins 99,9%. Combien de papayers doit-il planter ?

Exercice n° 8

D'après concours CCP 2015, filière TPC.

Le gala annuel d'une Ecole d'Ingénieurs est organisé dans un château. À l'arrivée, chaque participant devra déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires.
On appelle les vestiaires V1, V2 et V3. Chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire et équiprobable, indépendamment du choix des autres participants.
On suppose qu'il y a 1800 participants à la soirée.
On considère la variable aléatoire X, où X désigne le nombre de participants choisissant le vestiaire V1.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?
2. Déterminer la probabilité qu'aucun participant ne choisisse le vestiaire V1.
3. Déterminer la probabilité que tous les participants choisissent le vestiaire V1.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
5. Déterminer l'espérance de X.
6. On dispose de 800 cintres dans le vestiaire V1. Prouver que la probabilité qu'il ne soit pas nécessaire d'aller en chercher d'autres pendant la soirée est inférieure à 1%. *(On pourra se servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).*

Exercice n° 9

Un robot se déplace sur un axe gradué. Il est situé à l'origine de cet axe et, à chaque étape, il se déplace d'une unité dans un sens ou dans l'autre de façon équiprobable.
Par exemple, en une étape il peut passer de l'abscisse 0 à l'abscisse $+1$ ou bien à l'abscisse -1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n l'abscisse occupée par le robot après n étapes. L'objet de cet exercice est d'étudier X_n et d'évaluer la probabilité que le robot se retrouve à sa position originale à la fin de l'expérience.

1. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 2$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
   (b) Soit Y_2 le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en deux déplacements. Quelle est la loi de Y_2 ?
   (c) Calculer la probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale après 2 étapes.
2. Calculer la probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale après 3 étapes.
3. Cas général.
   (a) Soit Y_n le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en deux déplacements. Quelle est la loi de Y_n ?
   (b) Exprimer X_n en fonction de Y_n.
   (c) Quelle est la probabilité que le robot soit revenu en position initiale après n étapes ?

3 Exercices théoriques

Exercice n° 10

Soit X une variable aléatoire. On note μ l'espérance de X et σ^2 sa variance.
Prouver que, pour tout $\beta > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(\mu - \beta\sigma < X < \mu + \beta\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{\beta^2}$$

Exercice n° 11

Soit X une variable aléatoire réelle positive et $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
Démontrer l'**inégalité de Markov** : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$