PSI **Février 2024**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2. Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant ń le plus petit élément de ż.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 4. : (Ecrit e3A PSI 2019)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et φ_x la fonction qui à tout réel t associe $\varphi_x(t) = \max(x, t)$.
   (a) Donner une représentation graphique de φ_x.
   (b) Calculer $\Phi(x) = \int_0^1 \varphi_x(t)\, dt$.
   (c) Donner une représentation graphique de Φ.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on admet que l'on définit une variable aléatoire Y, définie sur le même espace probabilisé, par

$$\forall\omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\, dt$$

2. Dans cette question, X suit une loi géométrique. Déterminer $Y(\Omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
3. Dans cette question, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
   (a) Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=x])$ où $x \in X(\Omega)$, l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer $Y(\Omega)$ et donner la loi de probabilité de Y.
4. On suppose dans cette question que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1/2, 2\}$ et que

$$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{8},\ \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{3}$$

   (a) Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = 1/2)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y puis calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
   (c) On note Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé par $Z = XY$. Justifier que $Z(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.
   (d) Calculer la covariance des deux variables aléatoires X et Y.

Exercice 5. Ecrit e3A PSI 2020 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.
2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.
3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.
   3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.
   3.2. Exprimer l'évènement $(X_1 = X_2)$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.
   3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

   On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.
   Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

Exercice 6. : Ecrit e3A PSI 2021 On note S l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
   Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\frac{-1}{\gamma}$.
2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.
   Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?
   (1) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes :
   — X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
   — pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

3.1. Montrer que X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

3.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = y_{n-1}X_0 + y_n X_1$.

3.4. **Etude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in N$**

3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n), la covariance $Cov(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 7. **Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

Exercice 8. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 9. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$:

(a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

(b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in]-1, 1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Exercice 11. 1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. **Application**
On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 12. (e3A 2017) On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté Ω.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0, k]\!]$.
On considère alors une suite $(X_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_k$ et T sont mutuellement indépendantes.
On définit la variable aléatoire Y par : $\quad \forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraine l'existence de l'espérance de Y.
On pourra constater que $([T = j])_{j\in[\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'événements.
2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.
3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)\,\mathbb{E}(T)$.PS : Erreur dans l'énoncé original : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)\,(\mathbb{E}(T) + 1)$.

Exercice 13. On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ, $\dbinom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1; n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\,(i, j) \in [\![1; n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z - X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p + q$.
En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{k}$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

7. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$b_{i,j} = \mathbb{P}([(X,Y)=(i,j)]).$$

7.1. Déterminer le rang de la matrice B.

7.2. Déterminer la valeur de $\operatorname{tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Exercice 14. Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \varphi)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \varphi)$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ X_1(\omega) = 0 \ \text{ ou si } \ X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} \ \text{ si } \ X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 15. : (Mines Ponts 2018)
On lance simultanément six dés à six faces. Après chaque lancer, on enlève les dés ayant donné 6. On recommence avec les dés restants jusqu'à ce que tous les dés aient donné un 6. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.
2. La variable X possède-t-elle une espérance ? une variance ?

Exercice 16. : (Centrale 2018)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et d'espéance finie.

1. Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.
2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrer que $\dfrac{1}{E(X)} \leq E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
3. Montrer cette inégalité dans le cas général.

Exercice 17. : (Centrale 2018)
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Donner la loi de S_n et préciser son espérance et sa variance.
2. Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable $exp(\lambda(X_1 - \frac{1}{2}))$.
3. Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable $exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.
4. Soit $t, \lambda > 0$. Trouver une fonction f_t telle que $P(\lambda(_n - E(S_n)) > nt) \leq e^{nf_t(\lambda)}$.
5. Soit $\lambda > 0$. Déterminer le maximum de $f_t(\lambda)$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 18. : (Mines Ponts 2016) On considère une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de paramètre $p \in]0,1[$ (p probabilité d'obtenir un succès). On appelle doublé le fait d'obtenir deux succès de suite. On note $q = 1 - p$.
On introduit les évènements suivants :
A_n : « obtenir au moins un doublé au cours des n premières épreuves ». On note $p_n = P(A_n)$.
B_n : « obtenir le premier doublé aux rangs $n-1$ et n »

1. Montrer que $p(B_n) = \sum\limits_{k=1}^{p} p_k$. Montrer que $p_{n+3} = p^2 q(1 - \sum\limits_{k=1}^{p} p_k)$.
2. En déduire une relation entre $p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}$ et p_n.

3. Résoudre cette relation de récurrence. On pourra s'aider de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p^2q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. : Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \cdots, X_n)$ la matrice $M = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Si $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ (avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$) exprimer $V(X)$ en fonction de la matrice M.
2. En déduire que les valeurs propres de M sont toutes positives.