II.4 Vandermonde

Définition 5.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **déterminant de Vandermonde** le scalaire noté $V(a_1, \dots, a_n)$ défini par :

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

lemme 9. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\quad V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n)$

démonstration :

$$V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

On fait successivement et dans cet ordre, pour k allant en décroissant de $n+1$ à 2, on fait $C_k \leftarrow C_k - a_{n+1} C_{k-1}$:

$$V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & (a_1 - a_{n+1}) & a_1(a_1 - a_{n+1}) & \dots & a_1^{n-2}(a_1 - a_{n+1}) & a_1^{n-1}(a_1 - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & (a_{n-1} - a_{n+1}) & a_{n-1}(a_{n-1} - a_{n+1}) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_{n+1}) & a_{n-1}^{n-1}(a_{n-1} - a_{n+1}) \\ 1 & (a_n - a_{n+1}) & a_n(a_n - a_{n+1}) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_{n+1}) & a_n^{n-1}(a_n - a_{n+1}) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2}(a_1 - a_{n+1}) \times \dots \times (a_n - a_{n+1}) \times V(a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n)$$

en développant par rapport à la première ligne puis en factorisant en ligne. □

Proposition 10 (déterminant de Vandermonde)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $\boxed{V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)}$.

démonstration : par récurrence sur $n \geq 1$.

- L'initialisation est immédiate pour $n = 1$.
- supposons la propriété vraie au rang n.

On a :

$$V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right) \times \prod_{j=1}^{n} (a_{n+1} - a_j) = \prod_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right)$$

Proposition 11.

$V_{n+1}(a_0, \dots a_n) \neq 0$ assure que le système $MX = Y$ admet une unique solution où $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $M = (a_i^j)_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de Vandermonde, et $X = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, avec $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange.

Remarque 3. En effet, le problème d'interpolation revient à résoudre le système d'inconnue X :

$$M \times \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$