

Cahier de Vacances

A rendre pour le lundi 1 septembre 2023

Remarques

La période des congés d'été est la meilleure pour combler d'éventuelles lacunes, afin d'aborder l'année de spé PC dans les meilleures conditions. Ne vous y mettez pas juste avant la rentrée.

Tout le travail effectué avant la spé allègera d'autant la préparation des concours l'an prochain !

Les questions posées se veulent détaillées, et mettent en jeu une partie (non exhaustive) des savoirs et savoir-faire requis. Le tout est à rédiger pour le jour de la rentrée. Vous pouvez au besoin me contacter par courrier électronique, à l'adresse : mroger@cpge-brizeux.fr

Bonnes vacances et bon courage.

I. Le cours de PCSI : un pré-requis pour la PC

Le programme des concours porte largement sur le programme de PCSI. Il est habituel de trouver dans les sujets d'écrits des concours des questions de cours portant sur le programme de première année.

Vous devez réviser l'ensemble de vos énoncés de cours :

(NOM du théorème) + (hypothèse(s)) + (conclusion(s))

Attention, le programme de deuxième année est bouclé sur un rythme plutôt rapide (il y a 25 semaines avant les écrits), hors de question d'avoir des lacunes de cours avant de démarrer l'année.

Au cours de l'été, sur le rythme d'un ou deux chapitres par semaine, vous devez revoir tous vos énoncés et formules du cours de sup.

Il y a du travail, à vous de pratiquer régulièrement le cours de PCSI.

Vous devrez connaître vos définitions et propriétés, notamment :

- Intégration (théorème fondamental du calcul intégral, primitives usuelles, dérivation, théorème de limite de la dérivée, formule de Taylor avec reste intégral)
- développements limités usuels
- équivalents, notations \sim , $o()$, $O()$
- suites géométriques, sommes des termes,
- racines complexes, racines nièmes de 1
- factorisation de polynômes, division euclidienne
- séries numériques de références
- espaces vectoriels, sommes directes, supplémentaires
- applications linéaires
- calcul matriciel, matrice d'une application linéaire dans une base
- calculs de déterminants
- notion de produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz
- dénombrement : coefficients binomiaux, formule du triangle de Pascal
- probabilités : notations, événements, loi de Bernoulli, loi binomiale
- ...

il y aura une interrogation de cours de PCSI à la rentrée

II. Comment rédiger ? LE POINT CRUCIAL

Important : pour pouvoir parler d'un objet mathématique, il est indispensable de savoir le définir !

II.1 Utiliser une lettre pour désigner un objet mathématique

Important : pour pouvoir utiliser une lettre pour désigner un objet mathématique, il est indispensable d'avoir auparavant introduit cette notation !

Pour cela commencer votre phrase par "Soi(en)t" ou "Posons". exemple :

Dans l'énoncé "Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ ", la lettre f est signifiante, on peut l'utiliser sans la redéfinir dans la suite de l'exercice.

En revanche, la notation x est muette, **tout calcul avec cette lettre nécessite de l'avoir définie au préalable !**

Rédaction-type :

Les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+, x \mapsto 1 + x^2$ et $\mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables, donc la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Rédaction incorrecte, à proscrire : $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

(vous ne mentionnez pas la dérivabilité avant le calcul, et x n'est jamais défini...)

Il est urgent de distinguer les "lettres signifiantes" qui se réfèrent à un objet préalablement défini des "lettres muettes", qui ne changent pas l'objet lorsqu'on les remplace par une autre lettre qui n'a pas été définie précédemment.

exemple :

L'expression $\int_0^a s \, ds = \frac{a^2}{2}$ dépend de a , pour qu'elle ait un sens, cela nécessite d'avoir introduit au préalable la notation a qui doit être signifiante.

En revanche dans l'expression $\int_0^1 s \, ds$, la variable s est muette, et l'on aurait également pu noter l'objet $\int_0^1 t \, dt$ ou $\frac{1}{2}$: il ne dépend ni de s ni de t .

Exercice 1

Pour chaque lettre utilisée et soulignée, écrivez respectivement S ou m selon que la lettre est signifiante (S) ou muette (m).

1. La fonction $f : x \mapsto \cos(2\pi x) + 1$. Lettres : f, x
2. La fonction $g : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$. Lettres : g, x, u
3. La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$. Lettre : n
4. Soit $a > 0$, la suite (v_n) définie par : $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = a^p$. Lettres : a, p

II.2 Utiliser une propriété du cours

Important : pour pouvoir parler d'une propriété mathématique, il est indispensable de pouvoir le nommer avec précision !

Sur vos copies, les étapes suivantes doivent apparaître clairement pour pouvoir utiliser un théorème du cours :

- vérification des hypothèses
- nom du théorème
- conclusion

exemple :

La fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{\pi} - \sin x$ est continue sur $[0, \pi/2]$ dérivable sur $]0, \pi/2[$ avec $f(0) = f(\pi/2)$ (hypothèses).

Donc d'après le théorème de Rolle (nom du théorème), il existe $c \in]0, \pi/2[$ tel que $f'(c) = 0$. (conclusion).

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle non vide $[a; b]$ de \mathbb{R} , telles que $g(a) - f(a)$ et $g(b) - f(b)$ soient de signes contraires. Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = g(c)$. On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\varphi = f - g$.

II.3 Faire apparaître les enchainements logiques avec : donc, ssi, \Rightarrow , \Leftrightarrow

Important : évitez les mélanges entre les rédactions en français avec des phrase sujet/verbe/complément et le rédactions mathématiques avec des quantificateurs ou des symboles mathématiques.

Rédaction-type : Pour x réel on a :

$$x^2 - 1 > 0 \iff (x - 1)(x + 1) > 0 \iff (x < -1 \text{ ou } x > 1)$$

Donc la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ est définie sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Rédaction incorrecte, à proscrire :

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x < -1 \text{ ou } x > 1)$$

la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ est définie sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

(vous ne faites pas apparaître les implications ou équivalences logiques, vous comprendre devient IMPOSSIBLE : rédigez !)

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - \frac{1}{x})$, en résolvant par équivalence l'inéquation :

$$1 - \frac{1}{x} > 0.$$

II.4 Les quantificateurs \forall, \exists

Les quantificateurs \forall et \exists ne sont pas des abréviations : ils n'ont pas leur place dans vos phrases en français !

Exercice 4

Déterminez les ensembles suivants.

- $A = \{n \in \mathbb{N}; \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$
- $B = \{n \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$
- $C = \{x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}, x^2 = y\}$.
- $D = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}, x^2 = y\}$.

Exercice 5

Soient E et F deux ensembles.

- Définir la notion d'injectivité pour une application $\varphi : E \rightarrow F$.
- Définir la notion de surjectivité pour une application $\varphi : E \rightarrow F$.

Exercice 6

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E . Montrer que si f est injective, alors $f \circ f$ est injective.

II.5 Maths/Physique : des notations identiques pour des objets distincts !

Important : pour pouvoir utiliser une lettre pour désigner un objet mathématique comme en physique, il est indispensable d'avoir auparavant introduit cette notation !

5.a) Les fonctions

En mathématiques, la notation $f(x)$ n'a de sens que si l'énoncé ou vous-même avez défini x et f , et ne désigne JAMAIS une fonction, mais la valeur de cette fonction en x .

MEFIEZ-VOUS : nos collègues physiciens, eux, s'autorisent à dire "la fonction $f(x)$ ", en sous-entendant implicitement que f est bien définie et de classe C^∞ en x . C'est un héritage des notations de Leibniz(1646-1716) et qui a constitué une réelle avancée en terme de formalisme, en faisant le lien entre le graphe de fonctions usuelles et leur expression.

La notation plus tardive $f : x \mapsto f(x)$ permet d'étudier des objets beaucoup plus complexes, surtout lorsque l'ensemble de définition de f n'est pas simple et lorsqu'il y a des défauts de continuité ou de dérivabilité. Les problèmes de discontinuité ne sont d'ailleurs pas rares en physique théorique : le rigorisme des mathématiciens est utile.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$.

- Justifier que f n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .
- Justifier que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- Expliquez pour l'affirmation " f est dérivable" est imprécise et à éviter.
- Etant donnée $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qu'est il indispensable d'écrire et de justifier avant d'utiliser la notation " $g'(x)$ " ?
- f est-elle injective sur \mathbb{R} ? La restriction de f à \mathbb{R}^+ , notée $f|_{\mathbb{R}^+}$ est-elle injective ?
- f est-elle surjective ? L'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto f(x)$ est-elle surjective ?

5.b) Les signes =, \approx

En mathématiques, la notation = désigne l'égalité de deux objets, de manière intransigeante, et ne désigne JAMAIS l'approximation d'un objet par un autre.

Pour les développements limités, le programme de maths vous impose de les noter de l'une des manières suivantes :

- " $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$ "
- " $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ "

MEFIEZ-VOUS : nos collègues physiciens, eux, s'autorisent à écrire :

" Pour $x \ll 1$ (ou encore pour x petit) on a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ ", en négligeant le terme d'erreur, purement et simplement, lequel peut se calculer avec la formule de Taylor reste intégral $\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t) dt$, qui est "d'ordre 5" au voisinage de 0 : un $O(x^5)$. Bien sr pour faire une approximation numérique d'une quantité physique, et compte-tenu des incertitudes sur les données permettant le calcul, dans la pratique, et à la précision des données cela conduit au même résultat. Mais n'allez surtout pas utiliser ce genre d'approximations en dehors de "petites valeurs" de x . Et faites attention à l'homogénéité de vos formules en physique ; typiquement ce sont des développements limités en $x = \frac{r}{R}$, avec $r \ll R$ et r et R exprimés en mètres.

Ajoutons que les lois de la physique sont empiriques et dépendent de constantes calculées avec une certaine précision. Ainsi un mathématicien aurait plutôt tendance à noter $z(t) \approx z_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$ l'altitude d'un corps en chute libre en négligeant les frottements dus à l'air, en restant conscient du fait que le champ de pesanteur terrestre vaut approximativement $g = 9,81m.s^{-2}$ et n'est connu que par ses premières décimales, et que la loi est empirique et susceptible d'être modifiée selon la complexité du modèle (frottements, dépendance de $g = \frac{GM}{R^2}$, défaut de sphéricité de la Terre,...).

III. Analyse

III.1 Continuité et suites

Ayez une idée précise de la notion de suite, et de la suite dans les idées !

Attention : la notation " u_n " n'a de sens que si l'énoncé ou vous-même avez défini une suite u et un entier n , et ne désigne JAMAIS une suite, mais le terme d'indice n de cette suite.

Exercice 8

1. Définir la notion de continuité d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+2x} \cos x$.
A l'aide des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n\pi + \frac{\pi}{2})_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et la suite $(u_n) = (g(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Justifier que si g est croissante sur \mathbb{R}^+ , alors la suite (u_n) est croissante.
4. Montrer que la réciproque est fautive à l'aide de la fonction $x \mapsto x \cos(2x\pi)$

III.2 Suites, récurrence

Exercice 9

On souhaite montrer que la donnée de $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$ permet de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans le segment $[1, 2]$.

Rédaction type d'une démonstration par récurrence :

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

\mathcal{P}_n : " u_n est défini et appartient à $[1, 2]$ " .

• initialisation : u_0 est défini et appartient à $[1, 2]$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.

• hérédité : supposons \mathcal{P}_n (vraie) pour un entier n fixé.

On a $1 \leq u_n \leq 2$, donc $2 \leq 1 + u_n \leq 3$. Par décroissance sur \mathbb{R}_*^+ de $x \mapsto 1/x$, on a $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{1}{3}$, d'où $\frac{3}{2} \geq 1 + \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{4}{3}$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. D'où \mathcal{P}_{n+1} .

Ainsi, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et à valeurs dans le segment $[1, 2]$

1. Expliquez en quoi cela serait FAUX d'écrire :

" Montrons par récurrence la propriété " pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n : u_n est défini et appartient à $[1, 2]$ " "

2. Pour $u_0 = -\frac{3}{2}$, la formule de récurrence précédente $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$ permet-elle de définir une suite ?

III.3 Suites arithmético-géométriques

Exercice 10

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. A l'aide d'un changement d'indice, montrer que $(1 - \alpha) \sum_{k=0}^n \alpha^k = 1 - \alpha^{n+1}$.

2. En déduire que pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$.

3. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k$ converge vers $\frac{1}{1 - \alpha}$, pour tout $\alpha \in]-1, 1[$.

4. Pour α tel que $|\alpha| > 1$, quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n \geq 0} = \left(\sum_{k=0}^n \alpha^k \right)_{n \geq 0}$?

5. Pour $\alpha = 1$, quelle est la nature de la suite $(w_n)_{n \geq 0} = \left(\sum_{k=0}^n 1^k \right)_{n \geq 0}$?

III.4 Série divergente et introduction aux intégrales généralisées

Exercice 11

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la monotonie de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* , obtenir un encadrement de $\frac{1}{x}$ pour $x \in [k, k+1]$.

2. En déduire que $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln(k+1) - \ln(k)$.

3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En sommant pour k allant de 1 à n les inégalités précédentes, montrer que

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(1)$$

4. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ diverge ("vers $+\infty$ "), lorsque $n \rightarrow +\infty$.

5. Pour $A > 1$, calculer $\int_1^A \frac{dx}{x}$.

6. En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = +\infty$.

N.B. : on dira l'an prochain l'intégrale "généralisée" $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, ou encore que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$

III.5 Intégrale à paramètre

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$. Calculer $I_\lambda(A) = \int_0^A e^{-\lambda t} dt$.

2. En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_\lambda(A)$.

N.B. : Cette limite sera notée l'an prochain $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$

III.6 Développement limité, limite et prolongement

On considère la fonction définie sur $D = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$.

1. A l'aide d'un développement limité en 0 de la fonction $u : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$, montrer que f admet un $DL_1(0)$ que l'on déterminera.

2. montrer que f peut être prolongée en une fonction continue \tilde{f} en 0 en posant $\tilde{f}(0) = -\frac{1}{8}$.

3. Justifier que \tilde{f} est de \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

4. Préciser la tangente T_0 en 0 à $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$, la courbe représentative de \tilde{f} , ainsi que leur position relative, à l'aide d'un développement limité adéquat.

III.7 Une équation différentielle

On rappelle qu'étant donné $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y' = ay$$

est $\mathcal{S}_E = \{t \mapsto Ke^{at}; K \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 12

1. Ecrivez les ensembles de solutions des équation différentielle $(E_1) : x' = x$ et $(E_2) : y' = 2y$
2. Montrer qu'il existe un unique couple (x, y) avec x solution de (E_1) et y solution de (E_2) et la condition initiale $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.

IV. Algèbre linéaire

On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

IV.1 Application linéaire et polynôme

On travaille sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E .

1. Justifier que l'application $f : P \mapsto X^2P'' - P$ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice M de f dans la base \mathcal{B} .
3. Déterminer le rang de f , ainsi que son image $\text{Im } f$ (contenue dans $\mathbb{R}_3[X]$).
4. Quel est le noyau de f ?

IV.2 Déterminant

Exercice 13

Pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \geq 2$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

avec la convention $D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$.

1. En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant, justifier que :
pour $n \geq 2$, $D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$
2. Déterminer l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
3. En déduire une expression de D_n en fonction de n .

IV.3 Un système à paramètre

Soit $a \in]0, 1/2[$ un réel fixé.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le système paramétré par λ et d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{S}_\lambda : \begin{cases} -\lambda x & +ay & +(1-a)z & = & 0 \\ ax & -\lambda y & +(1-a)z & = & 0 \\ ax & +(1-a)y & -\lambda z & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 14

- Cas $\lambda = 1$. Montrer que l'ensemble des solutions de \mathcal{S}_λ est la droite (vectorielle) dirigée par $\vec{u}_1(1; 1; 1)$.
- Cas $\lambda = -a$. Montrer que l'ensemble des solutions de \mathcal{S}_λ est la droite dirigée par $\vec{u}_2(1; -a; -a)$.
- Cas $\lambda = -1 + a$. Montrer que l'ensemble des solutions de \mathcal{S}_λ est la droite dirigée par $\vec{u}_3(-1 + a; -1 + a; 1)$.
- Cas $\lambda \notin \{1, -a, -(1-a)\}$. Montrer que l'ensemble des solutions de \mathcal{S}_λ est réduit au vecteur nul.

IV.4 Etude d'un projecteur orthogonal

Exercice 15

On considère l'application linéaire $f : E \rightarrow E$ dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} est $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- En calculant A^2 , montrer que f est une projection.
- Montrer que $\text{Inv}(f) = \{x \in E; f(x) = x\}$ est la droite vectorielle \mathcal{D} dirigée par le vecteur \vec{u} de coordonnées $(1; 2; -1)$.
- Montrer que le noyau de f (c.à d. $\text{Ker}(f) = \{x \in E; f(x) = 0_E\}$) est le plan vectoriel \mathcal{P} d'équation $x + 2y - z = 0$.
- En notant \vec{v} et \vec{w} les vecteurs de coordonnées $(1; 0; 1)$ et $(-1; 1; 1)$, montrer que $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$.
- Justifier que $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de E . Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.
- En déduire que $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right)$ est une base orthonormale de E .
- En utilisant le fait que $\mathcal{D} = \text{Inv}(f) = \text{Vect}(\vec{u})$, et que $\mathcal{P} = \text{Ker}(f) = \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$, déterminer les images par f de \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} .
- En déduire la matrice D de f dans la base \mathcal{B}_2 .
- Ecrire P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_2 .
- Pourquoi a-t-on $P^{-1} = P^T$? (on utilisera le fait que \mathcal{B}_2 est une base orthonormée)
- Exprimer D en fonction de A, P et P^T , puis retrouver par le calcul l'expression de D .
- Quel est le rang de f ?