PSI **Avril 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Calcul différentiel

Exercice 1. : Pour la fonction suivante, démontrer qu'elle admet une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$ sans pour autant y être continue

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln|x| \text{ si } x\neq 0. \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Exercice 2. : Justifier que $f:(x,y)\mapsto e^{xy}(x+y)$ admet une différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$ et la déterminer.

Exercice 3. : Soit a un réel et f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)^a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a>0$.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a>1$.

Exercice 4. : Soit $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de :

1. $g:(x,y)\mapsto f(y,x)$. On donnera également la différentielle de g.
2. $g:(x,y)\mapsto xyf(xy,x^2)$
3. $g:(x,y)\mapsto f(xy,\dfrac{x}{y})$
4. $g:(x,y)\mapsto f(x,x)$
5. $g:(x,y)\mapsto f(y,f(x,x))$

Exercice 5. : Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et
$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},(x_1,\cdots,x_n)\mapsto\int_0^1 f(t,x_1t+x_2t^2+\cdots+x_nt^n)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que g est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 6. :Déterminer les applications de classe C^1 sur U vérifiant les EDP suivantes :

1. $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=af$ où $U=\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$. On pourra passer en polaire.
2. $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ où $U=\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$. On pourra poser $(u,v)=(x,\dfrac{y}{x})$.
3. $2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ où $U=\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+$.On pourra poser $(x,y)=(\dfrac{u^2+v^2}{2},\dfrac{u}{v})$.

Exercice 7. :

1. Trouver les extrémums locaux sur $(]0,+\infty[)^2$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=x+y+\frac{1}{xy}$.
2. En utilisant l'inégalité $\forall(x,y,z)\in(]0,+\infty[)^3$, $\sqrt[3]{abc}\leq\frac{1}{3}(a+b+c)$, montrer que f admet un unique extremum global.

Exercice 8. :

1. Montrer que $f:(x,y)\mapsto x^3+\ln(4+y^2)$ admet un unique point critique.
2. Calculer $f(x,x^3)-f(0,0)$.
3. f admet-elle des extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$? sur $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$?

Exercice 9. : Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\longmapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}-af$

Exercice 10. : Démontrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{xy}-1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ y & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.