PSI
MATHEMATIQUES
Avril 2024

Feuille d'Exercices
Calcul différentiel

Exercice 1. CCINP PSI 2021
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Expliciter des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y)<0$.
   Expliciter de même des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y)>0$.
   La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=f(1+u,1+v)-f(1,1)$.

3. Calculer, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)$ puis, pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\ g(r\cos\theta,r\sin\theta)$.
4. Prouver que pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\ g(r\cos\theta,r\sin\theta)\geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2}-2r\right)$.
   Que peut-on en conclure ?
5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Exercice 2. CCINP MP 2023
On définit la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Etablir que l'équation $e^{-x}=x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
3. À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0,y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 3. CCINP MP 2021

1. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire que :

$$\forall(a,b,c)\in]0,+\infty[^3,\quad \sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$$

   On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x;y)=x+y+\frac{1}{xy}$$

2. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Exercice 4. ATS 2019
Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré $\mathscr{D}$ défini par

$$\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x+y|\leq 2 \text{ et } |x-y|\leq 2\right\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f:\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathscr{D},\quad f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+1\right)-x.$$

1. L'ensemble $\mathscr{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur l'ensemble $\mathscr{D}$.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'ensemble $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathscr{O}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x+y|<2 \text{ et } |x-y|<2\right\}.$$

   (a) Déterminer le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x,y)$ de f en tout point (x,y) de $\mathscr{O}$.

(b) Montrer que $(1,0)$ est l'unique point critique de la fonction f dans $\mathscr{O}$.

(c) Sans calculer les deux dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, montrer qu'elles sont néanmoins égales pour tout $(x,y) \in \mathscr{O}$. Vous utiliserez un théorème bien choisi que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses.

(d) Pour $(x,y) \in \mathscr{O}$, donner une expression des dérives partielles secondes notées

$$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

(e) Donner les valeurs de r, s et t au point$(1,0)$. L'évaluation de la fonction $rt - s^2$ au point $(1,0)$ permet-elle de conclure sur la nature du point critique $(1,0)$?

(f) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$.

(g) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $t \mapsto f(1+t,0) - f(1,0)$ au voisinage de 0. Le point critique $(1,0)$ est-il un extremum local de f ?

Exercice 5. 1. Centrale PSI 2019

2. Centrale PSI 2015
3. Centrale PC 2018
4. Centrale TSI 2021