Table des matières

Pré-requis

Intégrale d'une fonction continue sur un segment, convergence des sommes de Riemann. Primitive d'une fonction continue, théorème fondamental du calcul différentiel.

Objectifs

Donner du sens aux intégrales du cours de physique ou chimie ayant des bornes infinies ou des bornes ouvertes. Servira à étudier la nature de certaines séries numériques. On généralise les propriétés de l'intégrales sur un segment aux fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.

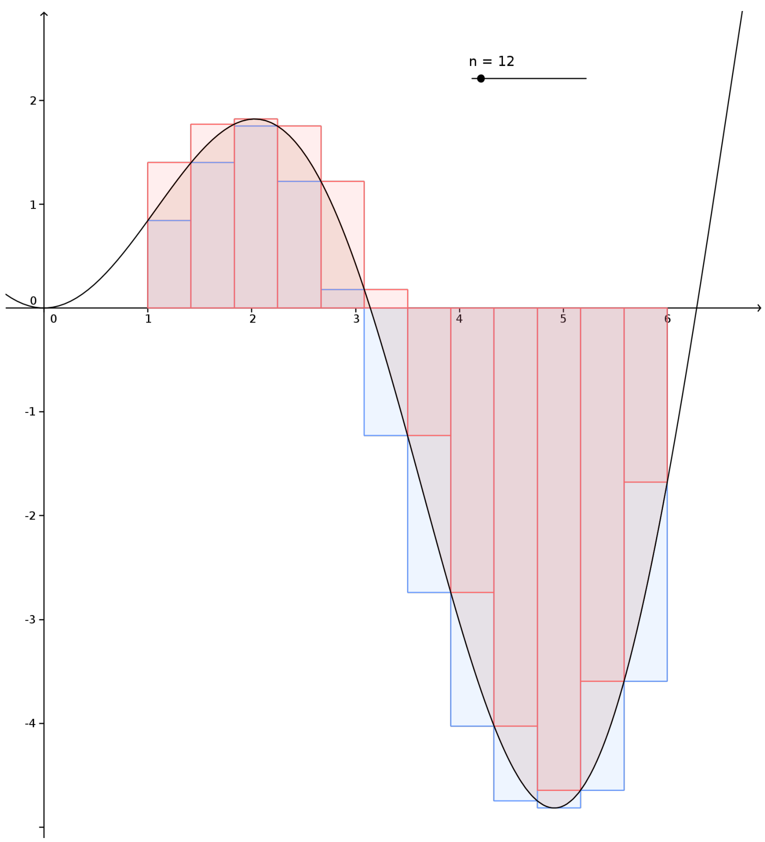
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I. Intégration sur un segment

I.1 Rappels de PCSI : Intégrales de Riemann

lemme 1. *Etant donnés deux réels $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$* **continue**, *la limite suivante existe et est finie :*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$$



Définition 1 (Intégrale de Riemann).

Etant donnés deux réels $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ on appelle **intégrale de** f sur le segment $[a,b]$ le nombre noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, ou $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, défini par :

$$\boxed{\int_{[a,b]} f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N}\ f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)}$$

Remarque 1. Cette définition s'étend immédiatement à toute fonction continue sur $]a,b[$ et prolongeable par continuité en a et b : on ne change pas la valeur d'une intégrale en changeant la valeur en l'une de ses bornes.

I.2 Lien entre primitive et dérivée

Théorème 2 (théorème fondamental du calcul intégral).

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

i) l'application $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

ii) Pour toute primitive H de f sur I, et tout $x \in I$, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t = H(x) - H(a)$.

iii) Si $\underline{G \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})}$, alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $\boxed{G(x) - G(a) = \displaystyle\int_a^x G'(t)\, \mathrm{d}t}$.

I.3 Extension aux fonctions continues par morceaux sur un segment

3.a) Définition

Définition 2.

Soit $I = [a, b]$ un segment. On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est $\boxed{\textbf{continue par morceaux}}$ sur I s'il existe un entier m, une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots x_n = b$ de I tels que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, en notant $I_i =]x_i, x_{i+1}[$, on ait :

$$f_{|I_i} : I_i \to \mathbb{K} \text{ est prolongeable par continuité sur } I_i.$$

exemple 1. $f : [0, 2] \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad t < 1 \\ -1 - t & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0, 2]$ (prendre la subdivision $0 < 1 < 2$).

Notation 1. On note $\boxed{\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On peut étendre cette notion aux fonctions définies sur un intervalle :

Définition 3.

Soit $J =]a, c[$ un intervalle. On dit que $f : J \to F$ est **continue par morceaux** sur J si elle est continue par morceaux sur tout segment $I \subset J$.

exemple 2. la partie entière $x \mapsto E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (prendre des subdivision $a < E(a) + 1 < \cdots < E(b) < b$ sur tout segment $[a, b]$).

Remarque : $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$

exemple 3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad t < 1 \\ -1 - t & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (prendre la subdivision $a < 1 < b$ sur tout segment $[a, b]$ contenant 1).

Définition 4.

Soit $I = [a, b]$ un segment, $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, m un entier et une subdivision adaptée $x_0 = a < x_1 < \dots x_m = b$ de I, i.e. pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$, en notant $I_i =]x_i, x_{i+1}[$, $f_{|I_i}$ est continue et se prolonge par continuité en ses extrémités.

On appelle **intégrale de** f sur le segment $[a, b]$ le nombre noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ défini par :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{I_i} f = \sum_{i=1}^{m} \left(\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{N} f\left(\left(x_i + \frac{k(x_{i+1} - x_i)}{N} \right)^+ \right) \right)$$

Théorème 3 (théorème fondamental du calcul intégral pour les fonctions continues par morceaux).

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

i') l'application $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

I.4 Propriétés des intégrales sur un segment

Proposition 4.

L'intégrale est linéaire :

$$\forall f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

Proposition 5.

L'intégrale est croissante :

$$\forall f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}),\ \forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

Proposition 6.

L'intégrale est positive :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}),\ \forall t \in [a, b], f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$$

Remarque 2. Les propriés de changement de variables, relation de CHasles, etc vues en PCSI sur les segments pour les fonctions continues restent vraies pour les fonctions continues par morceaux.

II. Intégrales généralisées d'une fonction continue ou continue par morceaux

II.1 Sur un intervalle du type $[a, +\infty[$

1.a) Définition

Définition 5 (Intégrale généralisée convergente sur $[a, +\infty[$).

Etant donnés un réel a et $f \in \mathcal{C}^0([a+\infty[, \mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{CM}([a+\infty[, \mathbb{K})$) on dit que **l'intégrale généralisée** de f sur $[a, +\infty[$ (impropre au voisinage de $+\infty$) **converge** lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

En cas de convergence, on note $\boxed{\int_a^{+\infty} f}$ ou $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t}$ la valeur de cette **limite finie**.

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

exemple 4. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ diverge, car $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $F : x \mapsto \ln(x)$ et $F(x)$ n'a pas de limite finie en $+\infty$.

exemple 5. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t) - t\sin(t)\ \mathrm{d}t$ diverge, car $f : x \mapsto \cos(x) - x\sin(x)$ a pour primitive $F : x \mapsto x\cos(x)$ et $F(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

1.b) Intégrales de référence

Proposition 7 (Intégrales de Riemann).

Soit α un réel.

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1}$.

De plus, on a : $\forall \alpha > 1,\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$.

démonstration : pour $\alpha = 1$ on primitive $x \mapsto x^{-1}$ en $x \mapsto \ln x$; pour $\alpha \neq 1$, on primitive $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ en $F : x \mapsto \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $-\alpha + 1 < 0$, ie ssi $1 < \alpha$. □

Proposition 8 (exponentielles).

Soit β un réel.

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\beta > 0}$.

De plus, on a : $\forall \beta > 0,\ \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}$.

démonstration : pour $\beta \neq 0$, on primitive $f : x \mapsto e^{-\beta x}$ en $F : x \mapsto \dfrac{e^{-\beta x}}{-\beta}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 0$. $\square$

II.2 Cas d'une fonction à valeurs positives. Comparaison.

Proposition 9 (C.N.S de convergence pour une fonction positive sur $[a, +\infty[$).

Etant donnés un réel a et $f \in \mathcal{CM}([a+\infty[, \mathbb{R})$ **à valeurs positives**, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est majorée.

démonstration : Par positivité de l'intégrale, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est croissante, et à valeurs positives. Elle admet une limite ℓ finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée, d'après le théorème de la limite monotone, vu en PCSI $\square$

Proposition 10 (Comparaison d'intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$).

Etant donnés un réel a et $f, g \in \mathcal{CM}([a+\infty[, \mathbb{R})$ **à valeurs réelles**

Si $\forall t \geq a,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Si $\forall t \geq a,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.

démonstration : Corollaire $\square$

exemple 6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

III. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

III.1 Nature et premiers exemples

1.a) Définition

Définition 6 (Intégrale impropre convergente sur $[a, b[$).

Etant donnés deux réels a, b et $f \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$) on dit que **l'intégrale généralisée** (impropre en b) de f sur $[a, b[$ converge lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** :

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ la valeur de cette limite.

On dit qu'elle diverge sinon.

Définition 7 (Intégrale généralisée convergente sur un intervalle réel qcq).

Etant donnés I un intervalle de bornes α et β réelles ou infinies, avec $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, on dit que **l'intégrale généralisée** de f sur I (impropre en les bornes infinies ou les bornes finies sans prolongement par continuité) converge lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** :

$$\lim_{x \to \alpha^+,\ y \to \beta^-} \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t$$

En cas de convergence, on note $\boxed{\int_\alpha^\beta f}$ ou $\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t}$ la valeur de cette **limite finie**.

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque 3. Il s'agit d'une généralisation à un intervalle quelconque I, avec $\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$, on dit que l'intégrale de $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ converge si $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \lim\limits_{y \to \beta^-} \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et est FINIE.

Cela permet de considérer des intervalles de la forme $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]a, b]$, $[b, a[$, etc...

Remarque 4. Ainsi pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$:

1. On détermine les éventuelles bornes infinies, et les valeurs éventuelles de discontinuité de f. On détermine alors le ou les intervalles de continuité de f.
2. Pour chaque segment dans un intervalle de continuité, on justifie l'existence d'une limite finie pour les intégrales dont une borne se raproche d'une borne impropre.

1.b) Intégrales de référence

Proposition 11 (Intégrales de Riemann).

Soit γ un réel.

L'intégrale généralisée $\int_0^1 t^{-\gamma}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\gamma < 1}$.

De plus, on a : $\forall \gamma < 1,\ \int_0^1 t^{-\gamma}\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{1-\gamma}$.

démonstration : on primitive $f : x \mapsto x^{-\gamma}$ en $F : x \mapsto \dfrac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $-\gamma + 1 > 0$, i.e. ssi $1 > \gamma$. $\square$

exemple 7. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ \mathrm{d}t$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, se primitive en $x \mapsto -e^{-x}$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, et de même $\int_{-\infty}^0 e^t\mathrm{d}t$ converge.

Proposition 12 (logarithme).

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ converge et vaut $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t = -1}$.

démonstration :

L'intégrale généralisée (impropre en 0) $\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ converge et vaut -1, car $f : x \mapsto \ln x$ a pour primitive sur $]0,1]$ la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ et par croissance comparées $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0$. $\square$.

Remarque 5. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

III.2 Propriétés

2.a) Cas des fonctions positives

Proposition 13 (C.N.S d'intégrabilité pour une fonction c.p.m. positive).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Etant donnée $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ **à valeurs positives**, alors l'intégrale généralisée $\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y,\ \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t \leq M.$$

idée démonstration : analogue

Proposition 14 (de comparaison d'intégrales de fonctions positives).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$0 \leq f \leq g.$$

Si $\int_\alpha^\beta g$ converge, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge, et $0 \leq \int_\alpha^\beta f \leq \int_\alpha^\beta g$

☐ *démonstration :* CNS

2.b) Propriétés usuelles.

Proposition 15 (Linéarité).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Si f et g sont continues par morceaux et si $\int_\alpha^\beta f$ et $\int_\alpha^\beta g$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\int_\alpha^\beta \lambda f + \mu g$ converge et $\int_\alpha^\beta (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$

démonstration : linéarité du passage à la limite. ☐

Proposition 16 (positivité).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Soit f appartenant à $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction positive dont l'intégrale généralisée converge.
Alors $\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$.

Proposition 17 (croissance).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Soient f, g appartenant à $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction
Soient $a < b$ et f, g appartenant à $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ dont les intégrales généralisées convergent.

Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta g(t)\ \mathrm{d}t$,

i.e. $(f, g \text{ intégrables et } \ \forall t \in I,\ f(t) \leq g(t)) \ \Rightarrow \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$

Proposition 18 (relation de Chasles).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, $c \in]\alpha, \beta[$, et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ converge.
Alors
$$\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^\beta f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 19 (Intégration par parties).

Soient I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, et u, v de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $\lim\limits_\alpha uv$ et $\lim\limits_\beta uv$ existent et sont finies.
Alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta u'v$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta uv'$ sont de même nature et en cas de convergence (simultanée), on a :
$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x \to \alpha^+,\ y \to \beta^-} [u(t)v(t)]_{t=x}^y - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$$

<u>*démonstration :*</u> Sur un segment $[u(t)v(t)]_{t=x}^y = \displaystyle\int_x^y (u(t)v(t))'\mathrm{d}t = \int_x^y u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\mathrm{d}t$, puis limite. □

Notation 2. $[u(t)v(t)]_{t=a}^b$ *est parfois noté* $[uv]_a^b$

Théorème 20 (changement de variables bijectif).

Soient $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$ deux intervalles réels, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement croissante.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge.

Si tel est le cas, alors $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\mathrm{d}u}$

démonstration :

On se place dans le cas f continue ; le cas continue par morceaux se traiterait à l'aide d'une subdivision en intervalles de continuité.

Soit F une primitive de f sur I, et $G = F \circ \varphi$.

G est dérivable sur $J = [\alpha, \beta]$ et pour tout $u \in J$, $G'(u) = \varphi'(u)F'(\varphi(u)) = \varphi'(u)f(\varphi(u))$, donc G est la primitive de $\varphi' \times f \circ \varphi$ qui vaut $F(\varphi(\alpha))$ en α.

Ainsi, pour tout β,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t \underset{\text{th fond. pour } F}{=} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \underset{\text{def. de} G}{=} G(\beta) - G(\alpha) \underset{\text{th fond. pour } G}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) f(\varphi(u))\mathrm{d}u.$$

Comme φ^{-1} est une bijection de I sur J, en posant $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta = \varphi^{-1}(b)$, on conclut. □

Remarque 6. c'est cette dernière version qui est souvent utile en pratique.

exemple 8. en posant $\varphi : u \mapsto e^u$, on a $\varphi^{-1} : t \mapsto \ln t$ et :

$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \mathrm{Arcsin}(\ln x) - \mathrm{Arcsin}(0) = \mathrm{Arcsin}(\ln x).$$

exemple 9. *changement de variable affine*

lorsque $J = [0,1]$, $I = [a,b]$ et $\varphi : J \longrightarrow I,\ u \longmapsto (1-u)a + ub$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (b-a) f((1-u)a+ub)\mathrm{d}u$

lorsque $J = [-1,1]$, $I = [a,b]$ et $\varphi : J \longrightarrow I,\ u \longmapsto \dfrac{a+b}{2} + u\dfrac{b-a}{2}$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + u\frac{b-a}{2}\right)\mathrm{d}u$

2.c) Propriétés avancées pour des fonctions positives.

Corollaire 21 (comparaison d'intégrales de fonctions positives, non explicitement au programme).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel, $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$. On suppose que g est **à valeurs positives**. .

1. Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ converge.
2. Si$|f(t)| \underset{t\to\beta^-}{=} O(g(t))$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta g$ ont même nature.
3. Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ converge.

démonstration : 1) Cas f positive : On utilise le critère d'intégrabilité pour des fonctions positives. Sinon astuce $f = f^+ - f^-$

2) Il existe t_0 et $K > 0$ tels que : $\forall t \geq t_0, |f(t)| \leq K|g(t)|$.

3) On se ramène au cas précédent en majorant $|f(t)|$ par $2K|g(t)|$, pour tout t dans l'intervalle $[t_0, \beta[$

Corollaire 22 (comparaison d'intégrales par équivalents en la borne impropre).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ telles que $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$. Alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)\ \mathrm{d}t$ ont même nature.

Remarque 7. On dispose des mêmes propriétés au voisinage de $\alpha = \inf(I)$ dans le cas où $I =]\alpha, \beta]$.

exemple 10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $f(x) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable en $+\infty$ et $f(x) \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable en $-\infty$, par comp. avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

NOUVEAU Programme 2022-23

III.3 Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

— *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
— *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
— *compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;*
— *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.	

Contenus	Capacités & Commentaires

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.
Propriétés des intégrales généralisées :
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration n'est pas exigible.
L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.
Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Changement de variable :
si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

La démonstration n'est pas exigible.
Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

d)(partiel)

Intégrale absolument convergente.
La convergence absolue implique la convergence.
Inégalité triangulaire.

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Notations $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :
pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:

- si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.
- si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, — intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; — étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.