Méthodes à retenir :

— Pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, commencer par mentionner la continuité de la fonction, puis examiner l'intégrabilité par comparaison (via des équivalents ou des majorations de valeurs absolues) aux bornes ouvertes infinies ou finies de l'ensemble de continuité.

— Pour calculer la valeur d'une intégrale généralisée convergente : essayer avec les primitives usuelles, ou par changement de variables, ou par intégration par parties, ou plus tard à l'aide d'une interversion série-intégrale

— Il faut connaître la nature des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^a \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^b \, \mathrm{d}t$, et savoir écrire $\dfrac{1}{t^c} = t^{-c}$

— **chercher, mettre en oeuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;

— **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;

— **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;

— **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;

— **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;

— **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

Justifier que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$ converge, à l'aide d'une fonction continue ou continue par morceaux judicieusement choisie.

Exercice 2 ✰

1. Etudier l'existence (c.à.d. la convergence de l'intégrale généralisée) de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$?
2. Après avoir remarqué que $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$, en déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 3 ✰✰

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \, e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 4 ☆☆

En remarquant que $f : t \mapsto \dfrac{(\ln t)^2}{t}$ est de la forme $u'(t)u(t)^2$, donner l'expression d'une primitive F de f sur $]0,+\infty[$, puis en déduire la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 5 ☆☆

En remarquant que $r : t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^{-t}$ est la partie réelle d'une fonction à valeurs complexes c dont on sait calculer une primitive C sur $\mathbb{R}$, en déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 6 ☆☆

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Après avoir étudier la continuité de f sur $[0,1[$, justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$.

II. Exercices

Exercice 7 ☆☆

Soit $h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ t^{-1/2} & \text{si} \quad t \in]0,1[\\ t^{-2} & \text{si} \quad t \in [1,+\infty[\end{cases}$

1. Justifier que h est continue (donc par morceaux) sur $]0,+\infty[$
2. Justifier que h n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Exercice 8 ☆☆ *Continuité et théorèmes de comparaisons aux bornes impropres*

Après avoir déterminer l'ensemble de continuité de la fonction dont l'expression apparaît sous le signe intégral, puis les bornes impropres, justifier l'existence des intégrales généralisées suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-3/2}$ en $+\infty$*
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-1/2}$ en 0*

Exercice 9 ☆☆

A l'aide d'une intégration par parties, justifiez que pour $a > 1$, l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a}\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 10 ☆☆

Etudier l'intégrabilité sur $I =]0,+\infty[$ de

$f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$;

Exercice 11 *Intégrales généralisées convergentes*

Soit $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{-\ln t}}\mathrm{d}t$;

A l'aide du changement de variable $t = 1-u$, montrer que K converge, en comparant à $u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ lorsque $t \to 1$.

Exercice 12 ✰✰

A l'aide du changement de variable affine $u = 1-t$, étudier la nature de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\mathrm{d}t$ et de

$J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t$

Exercice 13 ✰✰

Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et calculer

$I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

Exercice 14 ✰✰✰ *CDV*

On considère l'intégrale généralisée

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$$

1. Quelle est la nature de I ?
2. Etudier la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $[1, +\infty[$.
3. A l'aide du changement de variables $u = \sqrt{1+x^2}$, montrer que $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$
4. En déduire la valeur de I, en remarquant que $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\right)$

III. Exercices avancés

Exercice 15 ☆☆☆ *intégrale "semi-convergente"*

1. Montrer que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t$.
2. On veut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

   On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.

2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.

2.2. Pour tout $x > 1$, on définit

$\psi\ :\ x \mapsto \psi(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\, dt$.

Montrer que l'on a :

$\forall x > 1,\ \psi(x) = \cos(1) - \dfrac{\cos(x)}{x} - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$.

2.3. Prouver que $\psi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

2.4. Déduire de ces résultat que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

Exercice 16 ☆☆☆ *intégrale "semi-convergente"*

Montrer que les suites $(u_N) = \left(\displaystyle\int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right)$ et $(v_N) = \left(\displaystyle\int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right)$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir les inégalités

$$u_N \leq \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq v_N$$

pour tout $x \in [2N\pi, (2N+1)\pi[$ et

$$u_{N+1} \leq \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq v_N$$

pour tout $x \in [(2N+1)\pi, (2N+2)\pi[$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge (semi-convergence).

Exercice 17 ☆☆☆

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x) \mathrm{d}x$.

Exercice 18 ☆☆☆☆ *Centrale PC 2016*

Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge, et dans ce cas, montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 f$

NOUVEAU Programme 2022-23

III.1 Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
- *compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.	

Contenus	Capacités & Commentaires

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.
Propriétés des intégrales généralisées :
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :
$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration n'est pas exigible.
L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.
Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Changement de variable :
si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

La démonstration n'est pas exigible.
Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

d)(partiel)

Intégrale absolument convergente.
La convergence absolue implique la convergence.
Inégalité triangulaire.

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Notations $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $I=[a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :
pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:

- si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.
- si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, — intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; — étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

Notes

[1] correction : prolongement par continuité ;

[2] correction : $Arctan$ et linéarité

[3] correction : on primitive en $-1/2e^{-t^2}$

[6] correction : on primitive en Arcsin

[7] correction : il ne peut y avoir continuité par morceaux sur $[-1,1]$, car toute subdivision en 0 donne une fonction sans prolongement par continuité en 0^+.

[17] correction :

$$I=\int_0^\pi \ln(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\pi\ln 2+\int_0^\pi \ln(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x+\int_0^\pi \ln(\cos\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\pi\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x+2\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$$

Donc $I=\pi\ln 2+2I$ car $2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ via le cdv $u=\pi-x$ sur $[\pi/2,\pi]$ après découpage, et via le cdv $\pi/2-x=s$ on a $\int_0^\pi \ln(\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^\pi \ln(\cos x)\mathrm{d}x$ D'où $I=-\pi\ln 2$

[18] correction :

Pour $k\geq 2$ et $t\in\left]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, on a $f\left(\frac{k}{n}\right)\leq f(t)\left(\frac{k-1}{n}\right)$, donc $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$