Ordre des exercices : 11, 4, 5, 6, 9, 1, 2, 3, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

Méthodes à retenir :

— Pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, commencer par mentionner la continuité de la fonction, puis examiner l'intégrabilité par comparaison (via des équivalents ou des majorations de valeurs absolues) aux bornes ouvertes infinies ou finies de l'ensemble de continuité.

— Pour calculer la valeur d'une intégrale généralisée convergente : essayer avec les primitives usuelles, ou par changement de variables, ou par intégration par parties, ou plus tard à l'aide d'une interversion série-intégrale

— Il faut connaître la nature des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^a \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^b \,\mathrm{d}t$, et savoir écrire $\dfrac{1}{t^c} = t^{-c}$

— **chercher, mettre en oeuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;

— **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;

— **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;

— **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;

— **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;

— **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

Justifier que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge, à l'aide d'une fonction continue ou continue par morceaux judicieusement choisie.

Exercice 2 *Intégrales généralisées convergentes*

Après avoir déterminer l'ensemble de continuité de la fonction dont l'expression apparaît sous le signe intégral, justifier l'intégrabilité au voisinage des bornes ouvertes (finies ou infinies) de l'ensemble de continuité.

1. $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-3/2}$ en $+\infty$*
2. $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-1/2}$ en 0*
3. $\displaystyle K = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{-\ln t}}\mathrm{d}t$; *indication : faire le changement de variable $t = 1-u$ et comparer à $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ pour $t \to 1$*

Exercice 3 *Intégrales généralisées divergentes*

Justifier que l'intégrale généralisée suivante est divergente :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à t^{-1} en $+\infty$*
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+2t}\mathrm{d}t$; *indication : minorer $\displaystyle\int_0^{Y} \frac{1+t}{1+2t}\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_0^{Y} \frac{1}{2}\mathrm{d}t$*
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$; *indication : découper en 1 via la relation de Chasles*

Exercice 4 *Calculs usuels*

1. Après avoir remarqué que $\cos^2 t = \dfrac{\cos(2t)+1}{2}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 t \; \mathrm{d}t$
2. Après avoir remarqué que $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \; \mathrm{d}t$
3. En remarquant que $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, proposez une primitive F de $f : t \longmapsto \sin(t)\ \mathrm{e}^{-t}$, puis calculer la valeur de $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{e}^{-t} \; \mathrm{d}t$.

Exercice 5 ☆☆

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^3} \; \mathrm{d}t$.

Exercice 6 ☆☆

En remarquant que $f : t \mapsto \dfrac{(\ln t)^2}{t}$ est de la forme $u'(t)u(t)^2$, donner l'expression d'une primitive F de f sur $]0,+\infty[$, puis en déduire la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{t} \; \mathrm{d}t$.

Exercice 7 ☆☆

En remarquant que $r : t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-t}$ est la partie réelle d'une fonction à valeurs complexes s dont on sait calculer une primitive C sur $\mathbb{R}$, en déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-t} \; \mathrm{d}t$.

II. Exercices

Exercice 8 ☆

Pour $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{5/2}}$, justifier que g est dominée par f au voisinage de $+\infty$.

Après avoir donné la régularité de g sur $[1,+\infty[$, en déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x) \; \mathrm{d}x$.

Exercice 9 ☆☆

Soit $h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ t^{-1/2} & \text{si} \quad t \in]0,1[\\ t^{-2} & \text{si} \quad t \in [1,+\infty[\end{cases}$

1. Justifier que h est continue (donc par morceaux) sur $]0,+\infty[$
2. Justifier que h n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t) \; \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Exercice 10 ☆☆

Soit $\gamma > 0$ fixé. Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\gamma\ t\ e^{-\gamma t^2} \; \mathrm{d}t$.

Exercice 11 ☆☆☆ *Sommes de Riemann*

Calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N + k^2/N}$

Exercice 12 ☆☆☆ *CDV*

On considère l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$

1. Quelle est la nature de I ?
2. Etudier la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $[1, +\infty[$.
3. A l'aide du changement de variables $u = \sqrt{1+x^2}$, montrer que $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$
4. En déduire la valeur de I, en remarquant que $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\right)$

Exercice 13 ☆☆

Etudier la convergence de l'intégrale sur $I = [1, +\infty[$ de $x \mapsto x^{-n} \ln x$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 ☆☆

Etudier la convergence de l'intégrale sur $I = [1, +\infty[$ de :

a) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$;

b) $g : x \longmapsto \ln(e^{\beta x} + x)$, selon les valeurs de β ;

III. Exercices avancés

Exercice 15 ☆☆☆ *CCINP MP*

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

2) En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 ☆☆☆

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$.

Exercice 17 ☆☆☆☆ *Centrale PC 2016*

Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge, et dans ce cas, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f$

Exercice 18 ☆☆☆ *Intégrales « de Bertrand »(HP)*

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $f_{\alpha,\beta} : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

1. Pour $\alpha > 1$, remarquer que $1 < \dfrac{1+\alpha}{2} < \alpha$, puis justifier que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$. Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$
2. Pour $\alpha < 1$, remarquer que $1 > \dfrac{1+\alpha}{2} > \alpha$, puis justifier qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$.
   Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$
3. Pour $\alpha = 1$, montrer que $f_{1,\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$. *(faire un changement de variable)*

Exercice 19 ✰✰✰ *intégrale "semi-convergente"*

1. Montrer que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.
2. On veut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

   On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.

2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.

2.2. Pour tout $x > 1$, on définit

$\psi\ :\ x \mapsto \psi(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\, dt$.

Montrer que l'on a :

$\forall x > 1,\ \psi(x) = \cos(1) - \dfrac{\cos(x)}{x} - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$.

2.3. Prouver que $\psi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

2.4. Déduire de ces résultat que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

Exercice 20 ✰✰✰ *intégrale "semi-convergente"*

Montrer que les suites $(u_N) = \left(\displaystyle\int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right)$ et $(v_N) = \left(\displaystyle\int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right)$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir les inégalités

$$u_N \leq \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq v_N$$

pour tout $x \in [2N\pi, (2N+1)\pi[$ et

$$u_{N+1} \leq \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq v_N$$

pour tout $x \in [(2N+1)\pi, (2N+2)\pi[$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge (semi-convergence).