Table des matières

Pré-requis

Somme des termes d'une suite géométrique, théorème des suites adjacentes, séries numériques de 1ère année

Objectifs

I. Rappels de PCSI

I.1 Vocabulaire et définitions

Définition 1 (Sommes partielles).

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses **sommes partielles** par :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$$

Définition 2 (Série numérique, nature).

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles, on appelle **série numérique** de **terme général** u_n le couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_N)_{N\in\mathbb{N}})$, que l'on note $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$.

• Si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers une limite ℓ FINIE,
on dit que la **série** $\sum_{n\geq 0} u_n$ **converge**,

et la valeur de la limite de cette suite est appelée **somme** de la série, et est notée $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

• Si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles n'admet pas de limite FINIE,
on dit que **la série** $\sum_{n\geq 0} u_n$ **diverge**

(il est alors impossible d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ pour cette série divergente).

Remarque 1. $\boxed{\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \iff \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n \text{ existe et est FINIE.}}$

exemple 1. La série (téléscopique) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge, car la suite $\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)_{N\geq 1}$ de ses sommes partielles converge. La somme de la série vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$$

exemple 2. La série $\sum_{n\geq 0} 1$ diverge, var la suite $(N+1)$ de ses sommes partielles diverge. Il est INTERDIT d'écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$: la somme n'existe pas !!!

Définition 3 (Reste).

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ le **reste** d'ordre N, et on a : $R_N + S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, en notant S_N la somme partielle d'indice N.

I.2 Série à termes positifs

2.a) Notation sommatoire en cas de divergence d'une série à termes positifs

Convention : pour une série à termes positifs, on peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ pour traduire la limite divergente de la suite des sommes partielles de cette série divergente.

exemple 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$, mais $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ n'existe pas.

2.b) Critère de convergence

Proposition 1 (CNS de convergence d'une série positive).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ On a : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{N} u_k \leq M$$

démonstration : La suite des sommes partielles (S_N) est croissante. Elle converge si et seulement si elle est majorée par une constante (FINIE). □

2.c) Comparaison de séries positives

Proposition 2 (comparaison par inégalité).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a :
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$.

démonstration : Pour les sommes partielles, on a $0 \leq U_N \leq V_N,\ \forall N \in \mathbb{N}$.
Si (V_N) converge, alors la limite majore les sommes partielles de la série positive $\sum u_n$, donc elle converge.

Si (U_N) diverge, alors la limite des sommes partielles de la série positive $\sum u_n$ est $+\infty$, et par comparaison de suites, (V_N) diverge vers $+\infty$, donc $\sum v_n$ diverge. $\square$

Proposition 3 (comparaison via équivalent positif).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ ont même nature.

démonstration : Le premier point résulte directement du théorème de comparaison entre séries à termes positifs, et du fait que l'absolue convergence implique la convergence.

Pour le second point, il suffit de remarquer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq 2v_n + n^{-2}$, et on conclut grâce au théorème de comparaison de séries positives. $\square$

I.3 Grossière divergence

Proposition 4 (grossière divergence).

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$.
Par contraposée, si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge, on parle alors de **grossière divergence**.

démonstration : $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. Si (S_n) admet une limite finie ℓ, alors (u_n) a pour limite $\ell - \ell = 0$. $\square$

I.4 Séries géométriques

Proposition 5 (séries géométriques).

$\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} a^n \text{ converge } \iff |a| < 1}$, auquel cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

démonstration : Pour $a \neq 1$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^0 - a^{N+1}}{1-a}$, qui converge vers une limite finie si et seulement si $|a|^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, ssi $|a| < 1$. Si tel est le cas, la somme vaut $1/(1-a)$.

Le cas $a = 1$ est direct : la série est grossièrement divergente. $\square$

exemple 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

exemple 5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 3^n$ diverge.

4.a) Série exponentielle réelle, via la formule de Taylor

Rappel : pour f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, on a $f(x)=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{(x-0)^j}{j!}f^{(j)}(0)+\int_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}f^{(k+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$

par exemple pour $f:x\mapsto e^{zx}$, on a :

$e^x=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{x^j}{j!}+r_k$ avec $r_k=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}e^u\,\mathrm{d}u$

Comme $|r_k|\leq\left|e^{|x|}\displaystyle\int_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}\right|=e^{|x|}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, on obtient

Proposition 6 (exponentielle complexe).

$$\mathrm{e}^z=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^j}{j!}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=0}^{N}\frac{z^j}{j!},\ \forall z\in\mathbb{C}$$

I.5 Séries absolument convergentes, comparaison

Définition 4.

On dit que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq0}u_n$ est absolument convergente si la série (positive) $\displaystyle\sum_{n\geq0}|u_n|$ converge.

Proposition 7.

Toute série absolument convergente est convergente.

démonstration : Dans le cas d'une suite réelle (u_n), on note, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n^+=\max(0,u_n)=\dfrac{u_n+|u_n|}{2}$ et $u_n^-=-\max(0,u_n)=\dfrac{-u_n+|u_n|}{2}$, de sorte que :

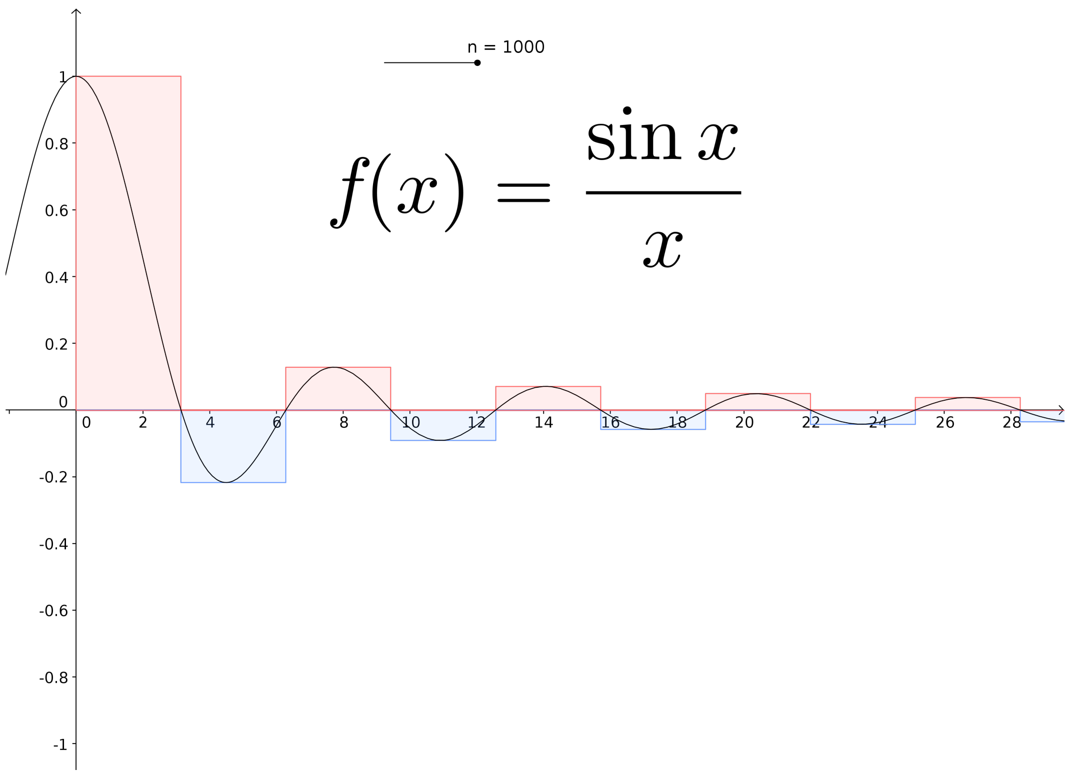
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_n^+-u_n^-,\ 0\leq u_n^+\leq|u_n|,\ 0\leq u_n^-\leq|u_n|.$

Si $\sum|u_n|$ converge, alors par comparaison de séries positives, $\sum u_n^+$ converge vers une limite finie L^+, et $\sum u_n^-$ converge vers une limite finie L^-. On en déduit que $\displaystyle\sum_n=0^N u_n=\sum_{n=0}^{N}u_n^+-\sum_{n=0}^{N}u_n^-\xrightarrow[N\to+\infty]{}L^+-L^-$, donc que $\sum u_n$ converge.

Dans le cas complexe, on se ramène au cas réel en remarquant que $|\operatorname{Re}u_n|\leq|u_n|$, donc $\sum\operatorname{Re}u_n$ est ACV. Et on procède de même pour $\sum\operatorname{Im}u_n$. $\square$

Remarque 2. Attention, il existe des séries numériques convergentes, non absolument convergentes !

On montrerait que $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{\sin n}{n}$ converge, mais que $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{|\sin n|}{n}$ diverge.



Proposition 8 (comparaison à une série positive).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a : Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

démonstration : Comme il existe K tel que $|u_n| \leq K v_n, \forall n$, on applique théorème de comparaison entre séries à termes positifs, puis le fait que l'absolue convergence implique la convergence.

□

I.6 Famille sommable

Définition 5.

Lorsque la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, on dit que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Ex $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, mais pas $((-1)^n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

II. Formule de Stirling

II.1 Préliminaires : constante d'Euler

Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{1}{t}$. Pour tout $n \geq 1$, on note $w_n = \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n+1)$.

1. Comme $f(n)-f(n+1) \geq w_n \geq 0$, par comparaison avec la série télescopique convergente $\sum f(n)-f(n+1)$, la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge, on note W sa somme.
2. Pour tout $N \geq 1$, $\sum_{k=1}^{N-1} w_k = \int_1^{N-1+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} = \ln(N) + 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.
3. ainsi en posant $g_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln N$ on a $g_N = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} w_k$ et la suite $(g_N)_{N\geq 1}$converge vers la limite notée $\gamma = 1 - W$. Cette limite est appelée « constante d'Euler ». Elle vaut environ $0,577...$

lemme 9. *Il existe $\gamma > 0$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

II.2 Formule de Stirling

Théorème 10 (Formule de Stirling).

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

démonstration (non exigible) :

1. (a) Pour $t \in [n, n+1]$, $\ln(k) \leq \ln t \leq \ln(k+1)$, donc par croissance de l'intégrale,
   $\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln t \ \mathrm{d}t \leq \ln(k+1)$

   (b) En sommant pour k allant de 1 à $N-1$,
   $\ln((N-1)!) = \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k) \underset{(G)}{\leq} \int_1^N \ln t \ \mathrm{d}t \underset{(D)}{\leq} \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k+1) = \ln(N!)$
   Ainsi, comme $t \mapsto t\ln t - t$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \ln t$, on obtient
   $N\ln N - N \underset{(D)}{\leq} \ln(N!) \underset{(G)}{\leq} (N+1)\ln(N+1) - (N+1) - 2\ln 2 + 2 = N\ln N + O(\ln N)$
   Ainsi $\ln(N!) = N\ln N - N + O(\ln N)$.

   (c) En posant $v_n = \ln(n!) - n\ln n + n$, on calcule
   $v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)\times n!) - (n+1)\ln(n+1) + (n+1) - \ln(n!) + n\ln n - n$
   $= \ln(n+1) + \ln(n!) - n\ln(n(1+1/n)) - \ln(n+1) + (n+1) - \ln(n!) + n\ln n - n$
   $= -n\ln(1+1/n) + 1 \underset{n\to+\infty}{=} -n[1/n - 1/(2n^2) + O(1/n^3)] = \frac{1}{2n} + r_n$, où $r_n = O(1/n^2)$ est le reste d'une série convergente.

On en déduit que la série télescopique $\sum_{n\geq 1} v_{n+1} - v_n$ converge, et en notant S sa somme, que

$$\ln(N!) - N\ln N + N - 1 = v_N - v_1 = \sum_{n=1}^{N-1} v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} r_n$$

c'est à dire $v_N - 1 = \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln N + \frac{\gamma}{2} + S + o(1)$, en utilisant la constante d'Euler

(d) Ainsi, pour $\ell = 1 + \gamma/2 + S$, on a montré que :

$$\ln(N!) \underset{n\to+\infty}{=} N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + \ell + o(1)$$

et en passant à l'exponentielle, $N! = \mathrm{e}^{N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + \ell + o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} K\sqrt{N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N \mathrm{e}^{o(1)} \quad (\mathcal{F})$

C'est à dire $\boxed{N! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\sqrt{N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N \quad (\star)}$

On va ensuite justifier que $K = \sqrt{2\pi}$.

II.3 Intégrales de Wallis

On pose pour $N \geq 0$, $W_N = \int 0^{\pi/2}(\sin t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. (a) i. $W_0 = \int_0^{\pi/2}(\sin x)^0 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, et $W_1 = \int_0^{\pi/2}\sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

Soit $n \geq 2$: $W_n = \int_0^{\pi/2}(\sin x)^n \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}(1-\cos^2 x) \, \mathrm{d}x$

$\underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}\cos^2 x \, \mathrm{d}x = W_{n-2} - \int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}\cos x \times \cos x \, \mathrm{d}x$

$\underset{\text{I.P.P.}}{=} W_{n-2} - \left(\left[\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\cos x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\times(-\sin x) \, \mathrm{d}x\right)$

Donc : $\forall n \geq 2,\ W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1}W_n$, ce qui fournit la **relation de récurrence** : $\forall n \geq 2,\ W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2} \quad (R)$.

ii. On montre alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_p$: « $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$ »

initialisation : $W_0 = \frac{\pi}{2}$.

hérédité : supposons $\mathcal{P}_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),

$W_{2p+2} = \frac{2p+2-1}{2p+2}W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \underset{\mathcal{P}_p}{=} \frac{(2p+1)}{2(p+1)}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$

$= \frac{(2(p+1))!}{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$, d'où $\mathcal{P}_{p+1}$.

On montre de même par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{Q}_p$: « $W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ »

initialisation : $W_1 = 1$.

hérédité : supposons $\mathcal{Q}_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),

$W_{2p+3} = \dfrac{2p+3-1}{2p+3} W_{2p+1} \underset{\mathcal{Q}_p}{=} \dfrac{(2p+2)}{(2p+3)} \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{[2(p+1)]^2}{(2p+3).\ (2p+2)} \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}$, d'où $\mathcal{Q}_{p+1}$.

Ainsi : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \dfrac{\pi}{2}, \quad \text{et } W_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}}$

iii. Soit $p \in \mathbb{N}$, d'après la formule $(\star)$: $W_{2p} \underset{1.}{=} \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \dfrac{\pi}{2} \underset{p \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2p}(2p)^{2p} e^{-2p} e^K}{2^{2p}(\sqrt{p} p^p e^{-p e^K})^2} \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$W_{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2p}K} \quad (1)$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $\sin(x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc $W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+1}\ \mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\ \mathrm{d}x = W_n$
donc $\boxed{\text{la suite } (W_n) \text{ est décroissante}}$.

Soit $n \geq 1$. On a en particulier $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$. Comme $W_n \geq 0$, on en déduit que :
$\boxed{\forall\ n \geq 1,\ W_n W_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_n W_{n-1}.}$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n = 2p$, $W_n W_{n+1} = W_{2p} W_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(2p)}$.
Pour $n = 2p+1$: $W_n W_{n+1} = W_{2p+1} W_{2p+2} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \dfrac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} = \dfrac{(2p+2)\pi}{2^2(p+1)^2} \underset{p \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.

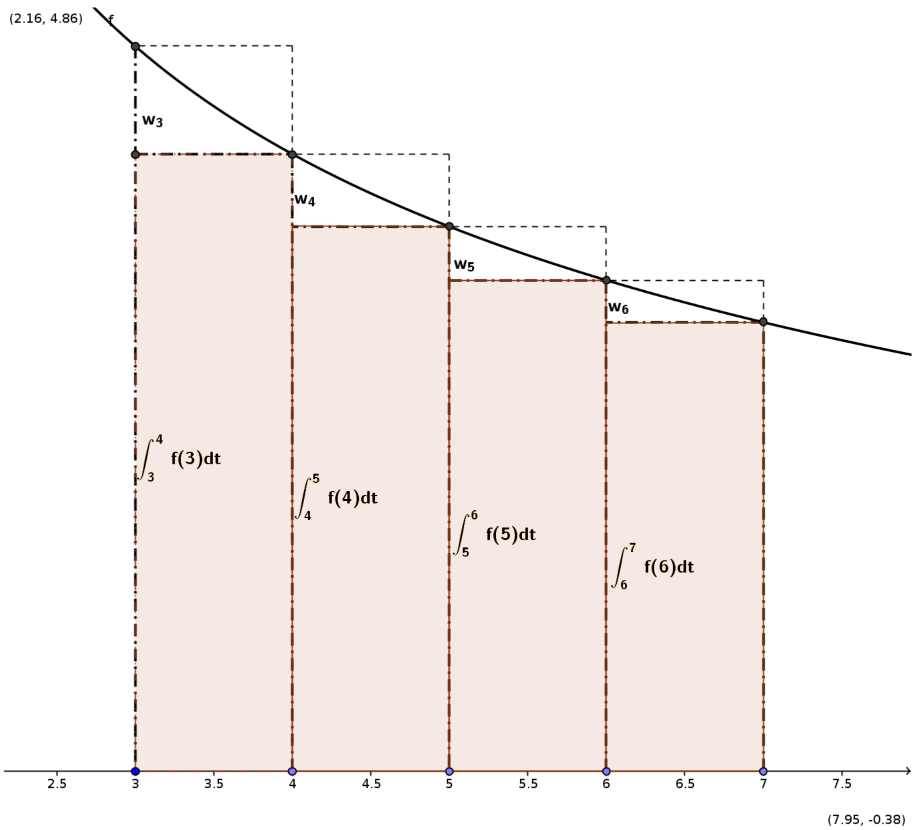
Donc $\boxed{W_n W_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}}$

(d) D'après le 2b), $W_n W_{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{\pi}{2n}(1 + o(1)) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. De même $W_{n-1} W_n \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{\pi + o(1)}{2n-2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.
L'encadrement précédent montre que la suite (nW_n^2) converge, et que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$. Comme $W_n \geq 0,\ \forall n \geq 0$,
on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
d'où $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis $W_{2p} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2 \times 2p}} \quad (2)$

(e) eDe (1) et (2) on déduit que $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \underset{p \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}K}$, donc $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{K}$. Conclusion $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$.

III. Comparaison série-intégrale

III.1 Technique de comparaison



lemme 11. *Pour f décroissante, c.p.m. positive,* $S_N = \sum_{k=0}^{N} f(k)$, $I_N = \int_0^N f(t)\ \mathrm{d}t$, *on a* $I_N + f(0) \geq S_N \geq I_{N+1}$

dém : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq f(k) \quad (E_k)$

donc en sommant de 0 à N,

$$S_{N+1} - f(0) \leq \int_0^{N+1} f(t)\ \mathrm{d}t = I_{N+1} \leq S_N$$

c'est à dire

$I_{N+1} \leq S_N \leq I_N + f(0)$ ou bien

$S_N - f(0) \leq I_N \leq S_{N-1} \quad (\star)$

technique d'encadrement série-intégrale pour une fonction monotone c.p.m. Elle permet d'établir des convergences et des divergences de séries, d'estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.

Corollaire 12 (Comparaison série intégrale (à redémontrer)).

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue par morceaux**, **décroissante** et **positive**.
Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors (I_N) converge, donc (S_N) est croissante et majorée donc converge, et ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge.
Si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge, alors (S_N) converge, donc (I_N) est croissante et majorée donc converge, et ainsi alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} f(n) \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

(c.à.d. la série et l'intégrale ont même nature : elles sont simultanément convergentes ou divergentes)

lemme 13. *Equivalent des sommes partielles en cas de divergence.*

Pour f décroissante, c.p.m. positive telle que $\sum f(n)$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n) \underset{\mathbb{N}\to+\infty}{\sim} I_N = \int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t$.

---

dém : Dans $S_N - f(0) \leq I_N \leq S_{N-1}$ $(\star)$, on divise par $S_N > 0$: $1 - f(0)/S_N \leq I_N/S_N \leq 1 - f(N)/S_N$ et on conclut par gendarmes.

---

lemme 14. *Encadrement des restes en cas de convergence.*

Pour f décroissante, c.p.m. positive telle que $\sum f(n)$ converge, en notant $\displaystyle J_N = \int_N^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, *alors*
$J_N \leq R_n \leq J_{N-1} \quad (2)$

---

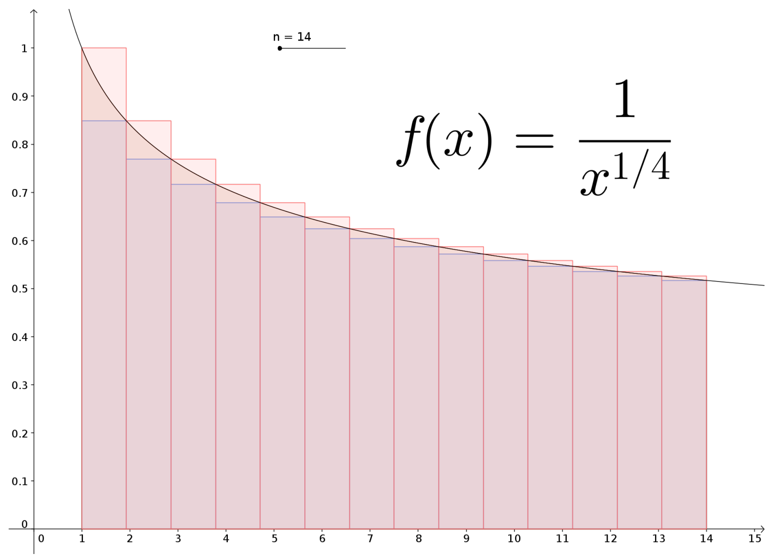
dém : en sommant (E_k) pour k de $N+1$ à P :

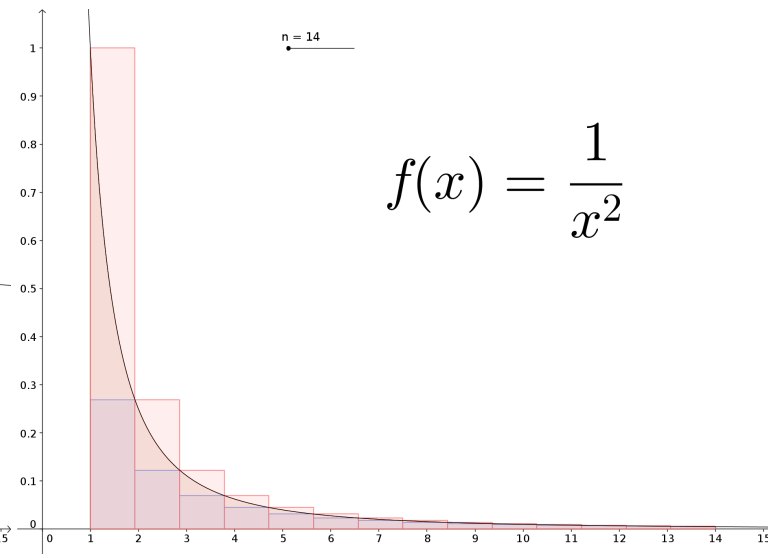
$\displaystyle\sum_{\ell=N+2}^{P+1} f(\ell) = \sum_{k=N+1}^{P} f(k+1) \leq \int_{N+1}^{P+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=N+1}^{P} f(k)$, donc

$\displaystyle R_{N+2} \leq J_{N+1} = \int_{N+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq R_{N+1}$

donc $J_N \leq R_n \leq J_{N-1} \quad (2)$

III.2 Séries de Riemann





Proposition 15 (séries de Riemann).

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

re-démonstration : on applique la technique de comparaisons précédente à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ qui est bien continue sur $]0,+\infty[$, positive, et décroissante lorsque $\alpha \geq 0$. □

démonstration PCSI :

- Cas $\alpha \leq 0$: $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 : il y a grossière divergence.
- Cas $\alpha \in]0,1[$: on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, donc $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(N+1)^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.
- Cas $\alpha = 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, donc $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(N+1) - \ln(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.
- Cas $\alpha > 1$: on a $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, donc $0 \leq S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(N)^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \leq \frac{1}{1-\alpha}$. Les sommes partielles sont majorées, donc la série à termes positifs converge. □

exemple 6. Les séries de Riemann (PCSI) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ sont convergentes, mais les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont divergentes.

IV. Règle de d'Alembert, série exponentielle

IV.1 Règle de d'Alembert des séries numériques

Proposition 16 (Règle de d'Alembert des séries numériques).

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes **tous non nuls**.
- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ et si $\ell \in [0,1[$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ est (grossièrement) divergente.
- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 1$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ peut être convergente ou divergente.

démonstration :
- il existe un entier n_0, tel que : $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \leq \dfrac{1+\ell}{2} = \gamma$, car par définition de la limite, pour $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$, $\left|\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} - \ell\right| < \varepsilon$, à.p.c.r. n_0.
Mais alors par récurrence immédiate, on obtient pour $n \geq n_0$, $|\alpha_n| \leq \gamma^{n-n_0}|\alpha_{n_0}|$. par comparaison avec la série géométrique de raison $\gamma \in [0,1[$ convergente, on obtient que $\sum\limits_{n\geq n_0} |\alpha_n|$ converge.
- il existe un entier n_0, tel que : $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \geq \dfrac{\ell+1}{2} = \gamma$, car par définition de la limite, pour $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2} > 0$, $\left|\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n - \ell|}\right| < \varepsilon$, à.p.c.r. n_0.
Mais alors par récurrence immédiate, on obtient pour $n \geq n_0$, $|\alpha_n| \geq \gamma^{n-n_0}|\alpha_{n_0}|$. par comparaison avec la série géométrique de raison $\gamma > 1$, on obtient que $\sum\limits_{n\geq n_0} |\alpha_n|$ diverge (grossièrement).

exemple 7. Attention, tout peut arriver dans le cas $\ell = 1$!!!
La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.
La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n+1)} = 1$.

IV.2 Série exponentielle complexe

Application :

Proposition 17 (Série exponentielle).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (vers e^z, l'exponentielle de z).

V. Séries alternées

Remarque 3. Plus tard, de tels développements en des puissances entières de z seront appelés “développements en série entière”.

Théorème 18 (Théorème spécial des séries alternées).

Supposons

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée (i.e. $((-1)^n u_n)$ a un signe constant) ;
2. la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$;

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ **converge**.

En outre la suite (R_N) des restes est du signe de u_0, et $\forall N \in \mathbb{N},\ |R_N| \leq |u_{N+1}|$, où $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$

démonstration : Dans le cas $u_0 \geq 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \geq 0$ et $u_{2n+1} \leq 0$.

On va montrer que les suites $(A_N) = (S_{2N})$ et $(B_N) = (S_{2N+1})$ vérifient les hypothèses du théorèmes des suites adjacentes, donc convergent vers une même limite finie.

- Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $a_{N+1} - a_N = S_{2N+2} - S_{2N} = u_{2N+2} + u_{2N+1} = |u_{2N+2}| - |u_{2N+1}| \underset{(|u_n|)\ decr.}{\leq} 0$, donc (a_N) est décroissante.

- Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $b_{N+1} - b_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = u_{2N+3} + u_{2N+2} = -|u_{2N+2}| + |u_{2N+1}| \underset{(|u_n|)\ decr.}{\geq} 0$, donc (b_N) est croissante.

- Pour $N \in \mathbb{N}$, $a_N - b_N = S_{2N} - S_{2N+1} = -u_{2N+1} \geq 0$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}, a_N \geq b_N$.

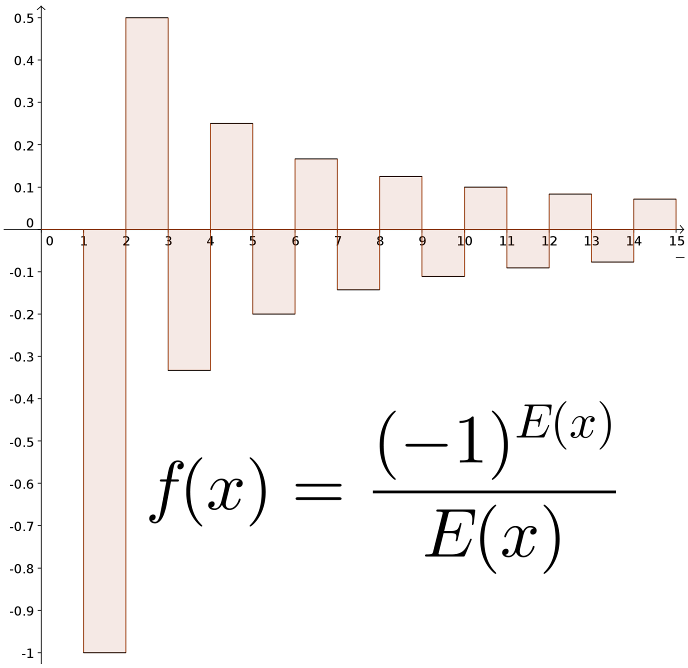
- on a $|a_N - b_N| = |u_{2N+1}| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Conclusion : d'après le théorème des suites adjacentes, (a_N) et (b_N) convergent vers une même limite ℓ, (et $\forall N \in \mathbb{N},\ a_N \geq \ell \geq b_N$).

Par ailleurs, $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_{2N+1} \leq \ell \leq S_{2N+2}$, donc $0 \leq \ell - S_{2N+1} \leq S_{2N+2} - S_{2N+1} = u_{2N+2}$, donc $|R_{2N+1}| \leq |u_{2N+2}|$ et $S_{2N} \geq \ell \geq S_{2N+1}$, donc $0 \geq \ell - S_{2N} \geq S_{2N+1} - S_{2N} = u_{2N+1}$, donc $|R_{2N}| \leq |u_{2N+1}|$.

Le cas $u_n \leq 0$ est analogue. $\square$.

Remarque 4. Lorsque ce critère s'applique, S_N fournit alors une valeur approchée de la somme S, à $|R_N|$ près



exemple 8. L'ensemble de définition de $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est $]-1,1]$, et pour $x \in [0,1]$, la somme partielle $S_N(x)$ est une valeur approchée de la somme à $\dfrac{1}{N+1}$ près.

VI. Produits de Cauchy

Définition 6.

Etant données deux séries numériques $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, leur **produit de Cauchy** est la série $\sum w_n$ de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p,q\in\mathbb{N};\ p+q=n} u_p v_q$

Théorème 19 (produit de Cauchy).

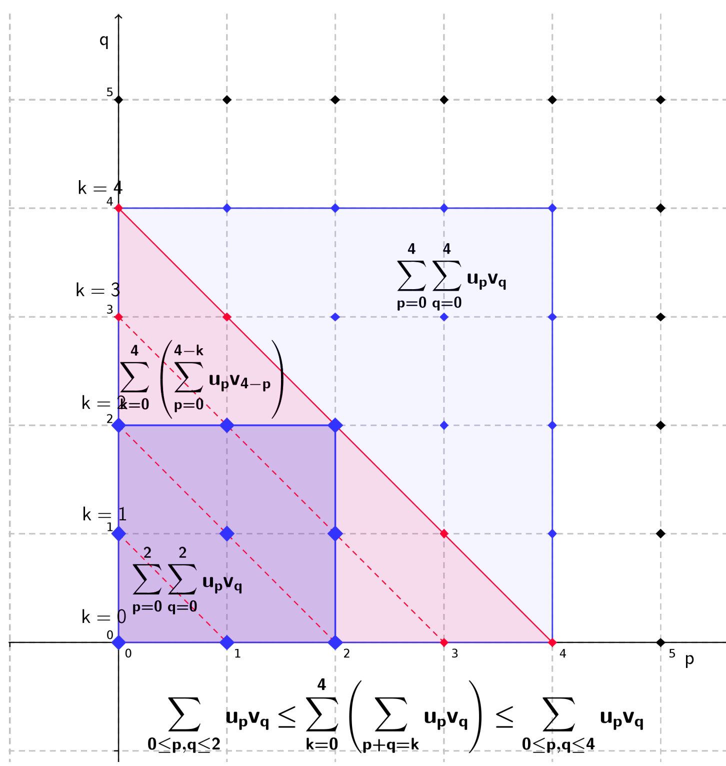
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries **absolument convergentes**, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} w_n$ est aussi absolument convergent, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p}\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$$

démonstration : (non exigible)

• Dans le cas où les suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs, on note $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Pour N fixé : $\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p}\right) = \sum_{p=0}^{N}\left(u_p \sum_{n=p}^{N} v_{n-p}\right) \leq \sum_{p=0}^{N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{N-p} v_\ell\right) \leq \sum_{p=0}^{N} u_p \times \sum_{p=0}^{N} v_p$, le membre de droite tend vers UV, donc les sommes partielles de la série positive $\sum_k w_k$ et majorées donc convergent vers W, avec $W \leq UV$.

En outre, $\sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right) = \sum_{p=0}^{2N} u_p\left(\sum_{n=p}^{2N} v_{n-p}\right) = \sum_{p=0}^{2N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{2N-p} v_\ell\right) \geq \sum_{p=0}^{N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{2N-p} v_\ell\right) \geq \sum_{p=0}^{N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{N} v_\ell\right)$ donc à la limite $W \geq UV$. D'où $W = UV$.



- Cas général : montrons d'abord que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente.

Notons $A=\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$ et $B=\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|$. Soit $N\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n=0}^{N}|w_n|=\sum_{n=0}^{N}\left|\sum_{p=0}^{n}u_pv_{n-p}\right|\leq\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{n}|u_p||v_{n-p}|\right)=\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{n=p}^{N}|u_p||v_{n-p}|\right)=\sum_{p=0}^{N}\left(|u_p|\sum_{n=p}^{N}|v_{n-p}|\right)\leq\sum_{p=0}^{N}|u_p|B\leq AB.$$

Donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente, donc convergente, vers un nombre W.

En notant, pour $N\in\mathbb{N}$, $U_N=\sum_{p=0}^{N}u_p$, $V_N=\sum_{q=0}^{N}v_q$, et $W_N=\sum_{q=0}^{N}w_q$, on a :

$$|U_NV_N-W_N|=|\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N}u_pv_q\right)-\sum_{q=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{q}u_pv_{q-p}\right)|=|\sum_{p=0}^{N}u_p\left(\sum_{q=0}^{N}v_q\right)-\sum_{p=0}^{N}u_p\left(\sum_{q=p}^{N}v_{q-p}\right)|$$

$$=|\sum_{p=0}^{N}u_p\left(\sum_{q=0}^{N}v_q-\sum_{q=p}^{N}v_{q-p}\right)|=|\sum_{p=0}^{N}u_p\sum_{q=N-p+1}^{N}v_q|\leq\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=N-p+1}^{N}|u_p||v_q|,$$

puis en “remontant” les calculs précédents en remplaçants les termes des suites par leurs valeurs absolues :

$$|U_NV_N-W_N|\leq\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N}|u_p||v_q|\right)-\sum_{q=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{q}|u_p||v_{q-p}|\right)=\left(\sum_{p=0}^{N}|u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{N}|v_q|\right)-\sum_{q=0}^{N}|w_q|.$$

Le cas positif montre que le membre de droite tend vers 0, d'où l'existence de la limite : $\lim_{N\to+\infty}W_N=\lim_{N\to+\infty}U_N\times\lim_{N\to+\infty}V_N$ □

exemple 9. $\exp(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ et $\exp(y)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{y^m}{m!}$ sont les sommes de deux séries absolument convergentes. Leur produit de Cauchy est donc absolument convergent et la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\times\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{y^m}{m!}=\sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{s}\frac{x^{s-m}}{(s-m)!}\frac{y^m}{m!}=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{1}{s!}\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}x^{s-m}y^m\underset{\text{binôme Newton}}{=}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^s}{s!}$$

On a $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

Remarque 5. On verra au chapitre “séries entières” que :

Proposition 20 (exponentielle complexe).

$$\exp(x+\mathbf{i}y)=\exp(x)\exp(\mathbf{i}y)=\exp(x)(\cos(y)+\mathbf{i}\sin(y))=\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}y},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\exp(\mathbf{i}y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathbf{i}^ny^n}{n!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\mathbf{i}^{2p}y^{2p}}{(2p)!}+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{\mathbf{i}^{2q+1}y^{2q+1}}{(2q+1)!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^py^{2p}}{(2p)!}+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{\mathbf{i}(-1)^qy^{2q+1}}{(2q+1)!}=\cos(y)+\mathbf{i}\sin(y)$$

Nouveau Programme PC 2022 :

A - Compléments sur les séries numériques

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.

L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

ancien Programme PC :

A - Séries numériques

Cette partie consolide et élargit les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.

La semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments sur les séries à valeurs réelles	
Théorème de comparaison entre une série et une intégrale : si f est une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, positive et décroissante alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$.	
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	Démonstration non exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
b) Produit de Cauchy de deux séries	
Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes est la série $\sum w_n$ avec : $$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p.$$	
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et on a : $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$	Démonstration non exigible.