Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :
$\sum_{n=0}^{N} u_n$ est une somme partielle, avec N fixé ; $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série convergente de terme général u_n ;
Enfin $\sum_{n\geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n dont on ne connaît pas forcément la nature ;
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ converge, il suffit de comparer $|u_n|$ au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ diverge, il suffit de savoir que u_n ne tend pas vers 0 (grossière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles (S_N) indépendamment de N par une même constante.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆ *« Série géométrique »*

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geq 0} = (a^n)_{n\geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^{N} a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$ et expression de la somme en cas de convergence.

Exercice 2 ☆ *« Série télescopique »*

Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$,

où $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et donner la valeur de sa somme.

On pourra remarquer que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$.

Exercice 3 ☆ *« Comparaison de séries »*

Sachant que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, quelle est la nature de la série :

$\sum_{n\geq 1} v_n$, pour $v_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$?

$\sum_{n\geq 1} w_n$, pour $w_n = \dfrac{1}{n^2}$ si n est multiple de 3, $w_n = 0$ sinon ?

Exercice 4 ☆☆ *« Sommes partielles d'une série divergente »*

1. Calculer $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, pour $M \geq 1$ entier.
2. Pour $k \geq 2$, encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant la décroissance sur $[k, k+1]$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire qu'un équivalent de $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ lorsque $N \to +\infty$ est $\ln N$.

II. Exercices

Exercice 5 ☆☆☆

Discuter selon la valeur des paramètres réels α, β la nature des séries suivantes de terme général :

a) $a_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ b) $b_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\beta}$

c) $c_n = \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ d) $d_n = (1+n^\alpha)^\beta$

Exercice 6 ☆☆ *« sommes partielles d'une série divergente »*

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$;
2. $u_n = \ln n/n$

Exercice 7 ☆☆ *« sommes partielles d'une série divergente »*

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$;
2. $u_n = \ln n/n$

Exercice 8 ☆☆ *« Critère spécial »*

Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N, pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

en déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
Comment ferait-on en Python pour calculer cette valeur approchée ?

Exercice 9 ☆☆☆

Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$, où $\forall n \geq 1,\ u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

III. Exercices avancés

Exercice 10 ☆☆ *Mines-Telecom 2017*

Pour $\alpha > 0$ fixé, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}^\alpha \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 11 ☆☆ *« reste d'une série convergente »*

Soit $\alpha > 1$ fixé. Justifier que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

En déduire un équivalent simple à $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 12 ☆☆☆ *« HP : Série de "Bertrand" »*

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, de paramètres réels α et β, converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 13 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 14 ☆☆☆ *Mines-Ponts PC*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on précisera.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{2^n}$

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite (u_n).
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n ;
3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux u_n , $(-1)^n u_n$, u_n/n
(on pourra étudier la suite définie par : $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$)
4. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$

IV. Constante d'Euler

Exercice 16 ☆☆

Pour tout $n \geq 1$, on note $w_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire que la série $\sum w_n$ converge, on notera E sa somme.
3. En déduire que $\ln N - \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \underset{N\to+\infty}{=} E + o(1)$, puis que

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln N - 1 + E + o(1),$$

   c'est à dire $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1) \quad (\mathcal{E})}$, où $\gamma = E - 1 > 0$ est appelé constante d'Euler.

V. Formule de Stirling

Exercice 17 ☆☆☆

On admet (c.f. exercice précédent) que $s_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1) \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln N$

1. *Premier Développement asymptotique de* $\ln(n!)$
   (a) Pour $n \geq 1$, comparer $\ln k$, $\int_k^{k+1} \ln t \,\mathrm{d}t$ et $\ln(k+1)$.
   (b) En sommant les inégalités de droite pour k allant de 1 à $N-1$, en déduire que $N \ln N - N \leq \ln N!$
   En sommant les inégalités de gauche pour k allant de 1 à $N-1$, en déduire que $\ln N! \leq N \ln N - N + t_N$ où $T_N \underset{N\to+\infty}{=} O(\ln N)$
   (c) En déduire que $\ln(N!) = N \ln N - N + O(\ln N)$, soit $N! \underset{N\to+\infty}{=} \frac{N^N}{\mathrm{e}^N} \mathrm{e}^{O(\ln N)}$.
2. *Raffinement : développement asymptotique de* $\ln(n!) - n \ln n + n$
   (a) En posant $v_n = \ln(n!) - n \ln n + n$, et à l'aide de dévelopements limités, montrer que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n} + r_n$, où $r_n = O(1/n^2)$ est le reste d'une série convergente.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} v_{n+1} - v_n$ converge, et en notant S sa somme, que $v_N - 1 = \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} \ln N + \frac{\gamma}{2} + S + o(1)$, en utilisant la constante d'Euler
   De sorte que, pour $\ell = 1 + \gamma/2 + S$, on a montré que :
   $$\ln(N!) \underset{n\to+\infty}{=} N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \ell + o(1)$$
   (c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ que l'on exprimera en fonction de ℓ que :
   $$\boxed{N! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{N} \left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N \qquad (\star)}$$
3. *Intégrales de Wallis* On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.
   (a) i. Calculer W_0 et W_1. Pour $k \geq 2$, établir une relation entre W_k et W_{k-2}.
   ii. En déduire les formules $\boxed{W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$ et $\boxed{W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$.
   iii. A l'aide de $(\star)$, en déduire que $W_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2p}\, C} \quad (1)$
   (b) Justifier que la suite (W_n) est décroissante et positive, et pour tout $n \geq 0$, $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$
   (c) En déduire que
   $$W_n W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$
   (d) En déduire la formule $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$, puis $W_{2p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\times 2p}} \quad (2)$.
   (e) En déduire la formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$

Notes

[1] correction :

pour $a \neq 1$, $S_N = \dfrac{a^0 - a^{N+1}}{1-a}$. il y a concergence ssi $a^{N+1} \to 0$ c'est à dire ssi $|a| < 1$, vers $\dfrac{1}{1-a}$.

[9] correction : Considerer un D.l. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{n} + r_n$, avec $r_n \underset{n\to}{=} O(n^{-3/2}$ terme général d'une série convergente, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV par critère spécial, et $\sum \dfrac{1}{n}$ DV.

[13] correction : $|u_{n+1}| \to 0$, par DL2, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

[14] correction :

1. $\ell = 0$
2. apcr, $u_{n+1} \leq \dfrac{1+1/2}{2} u_n$ et majoration par $O((3/4)^n)$
3. $\sum \ln(1+u_k)$ CV, car a même nature que $\sum u_k$, on a donc $u_n = \dfrac{u_0}{2^n} \times \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$; $K = \lim_n u_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$

[15] correction :

$u_n = \dfrac{3n-1}{3n} un - 1$ par IPP

$u_0 = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{9}$

[16] correction :

1. Pour $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{n+1}$ donc par croissance de l'intégrale, $\dfrac{1}{n} \geq w_n \geq$ et $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
2. Par comparaison entre séries positives, comme la série telescopique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ converge vers 1 (sommes partielles), alors la série $\sum w_n$ converge.
3. En sommant pour n de 1 à $N-1$, on a bien, par Chasles, avec $\int_1^N = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t \ln N$: $\sum_{n=1}^{N-1} w_n = \ln N - \sum_{n=1}^{N-1} \dfrac{1}{n+1} \underset{N\to+\infty}{=} E + o(1)$

   Ainsi $\ln N - 1 - \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} = E + o(1)$, d'où le résultat. $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln N - 1 + E + o(1) \underset{N\to+\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1)$, où $\gamma = E - 1 > 0$ est la constante d'Euler.

[17] correction :

1. (a) Pour $t \in [n, n+1]$, $\ln(k) \leq \ln t \leq \ln(k+1)$, donc par croissance de l'intégrale,
   $\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln t \, \mathrm{d}t \leq \ln(k+1)$

   (b) En sommant pour k allant de 1 à $N-1$,
   $\ln((N-1)!) = \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k) \underset{(G)}{\leq} \int_1^N \ln t \, \mathrm{d}t \underset{(D)}{\leq} \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k+1) = \ln(N!)$
   Ainsi, comme $t \mapsto t\ln t - t$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \ln t$, on obtient
   $N \ln N - N \underset{(D)}{\leq} \ln(N!) \underset{(G)}{\leq} (N+1)\ln(N+1) - (N+1) - 2\ln 2 + 2 = N \ln N + O(\ln N)$
   Ainsi $\ln(N!) = N \ln N - N + O(\ln N)$.

   (c) En posant $v_n = \ln(n!) - n \ln n + n$, on calcule
   $v_{n+1} - v_n = \ln((n+1) \times n!) - (n+1)\ln(n+1) + (n+1) - \ln(n!) + n \ln n - n$
   $= \ln(n+1) + \ln(n!) - n\ln(n(1+1/n)) - \ln(n+1) + (n+1) - \ln(n!) + n \ln n - n$
   $= -n\ln(1+1/n) + 1 \underset{n\to+\infty}{=} -n[1/n - 1/(2n^2) + O(1/n^3)] = \dfrac{1}{2n} + r_n$, où $r_n = O(1/n^2)$ est le reste d'une série convergente.

On en déduit que la série télescopique $\sum_{n\geq 1} v_{n+1}-v_n$ converge, et en notant S sa somme, que

$$\ln(N!)-N\ln N+N-1=v_N-v_1=\sum_{n=1}^{N-1} v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N-1} r_n$$

c'est à dire $v_N-1 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln N+\frac{\gamma}{2}+S+o(1)$, en utilisant la constante d'Euler

(d) Ainsi, pour $\ell=1+\gamma/2+S$, on a montré que :

$$\ln(N!) \underset{n\to+\infty}{=} N\ln N-N+\frac{1}{2}\ln N+\ell+o(1)$$

et en passant à l'exponentielle, $N!=\mathrm{e}^{N\ln N-N+\frac{1}{2}\ln N+\ell+o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} K\sqrt{N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N \mathrm{e}^{o(1)} \quad (\mathcal{F})$

C'est à dire $\boxed{N! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\sqrt{N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N \quad (\star)}$

2. (a) i. $W_0=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^0\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, et $W_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\ \mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\pi/2}=1$.

Soit $n\geq 2$: $W_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\ \mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}(1-\cos^2 x)\ \mathrm{d}x$

$\underset{\text{linéarité}}{=}\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}\cos^2 x\ \mathrm{d}x=W_{n-2}-\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}\cos x\times\cos x\ \mathrm{d}x$

$\underset{\text{I.P.P.}}{=} W_{n-2}-\left(\left[\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\cos x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\times(-\sin x)\ \mathrm{d}x\right)$

Donc : $\forall n\geq 2,\ W_n=W_{n-2}-\frac{1}{n-1}W_n$, ce qui fournit la **relation de récurrence** : $\quad\forall n\geq 2,\ W_n=\frac{n-1}{n}W_{n-2}\quad (R)$.

ii. On montre alors par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_p$: « $W_{2p}=\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$ »

initialisation : $W_0=\frac{\pi}{2}$.
hérédité : supposons $\mathcal{P}_p$ pour un entier $p\in\mathbb{N}$. d'après (R),
$W_{2p+2}=\frac{2p+2-1}{2p+2}W_{2p}=\frac{2p+1}{2p+2}\ W_{2p}\underset{\mathcal{P}_p}{=}\frac{(2p+1)}{2(p+1)}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$
$=\frac{(2(p+1))!}{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$, d'où $\mathcal{P}_{p+1}$.

On montre de même par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{Q}_p$: « $W_{2p+1}=\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ »

initialisation : $W_1=1$.
hérédité : supposons $\mathcal{Q}_p$ pour un entier $p\in\mathbb{N}$. d'après (R),
$W_{2p+3}=\frac{2p+3-1}{2p+3}W_{2p+1}\underset{\mathcal{Q}_p}{=}\frac{(2p+2)}{(2p+3)}\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}=\frac{[2(p+1)]^2}{(2p+3).\ (2p+2)}\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}=\frac{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}$, d'où $\mathcal{Q}_{p+1}$.

Ainsi : $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ W_{2p}=\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2},\quad \text{et } W_{2p+1}=\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}}$

iii. Soit $p\in\mathbb{N}$, d'après la formule $(\star)$: $W_{2p}\underset{1.}{=}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2p}(2p)^{2p}e^{-2p}e^K}{2^{2p}(\sqrt{p}p^p e^{-p}e^K)^2}\frac{\pi}{2}$, donc

$W_{2p}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{\sqrt{2p}e^K}\quad (b)$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall x\in[0,\pi/2]$, $0\leq\sin x\leq 1$, donc $\sin(x)^{n+1}\leq(\sin x)^n$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc $W_{n+1}=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n+1}\ \mathrm{d}x\leq\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\ \mathrm{d}x=W_n$

donc $\boxed{\text{la suite } (W_n) \text{ est décroissante}}$.
Soit $n\geq 1$. On a en particulier $W_{n+1}\leq W_n\leq W_{n-1}$. Comme $W_n\geq 0$, on en déduit que :
$\boxed{\forall\ n\geq 1,\ W_nW_{n+1}\leq W_n^2\leq W_nW_{n-1}.}$

(c) Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour $n=2p$, $W_nW_{n+1}=W_{2p}W_{2p+1}=\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}=\frac{\pi}{2(2p+1)}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2(2p)}$.

Pour $n=2p+1$: $W_nW_{n+1}=W_{2p+1}W_{2p+2}=\frac{\pi}{2}\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}\frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}=\frac{(2p+2)\pi}{2^2(p+1)^2}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2(2p+1)}$.

Donc $\boxed{W_nW_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2n}}$

(d) D'après le 2b), $W_nW_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi}{2n}(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. De même $W_{n-1}W_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi+o(1)}{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. L'encadrement précédent montre que la suite (nW_n^2) converge, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $W_n \geq 0,\ \forall n \geq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$,
d'où $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis $W_{2p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\times 2p}}$ $\quad(2)$

(e) De (1) et (2) on déduit que $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}e^K}$, donc $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{e^K}$. Conclusion $\boxed{e^K = \sqrt{2\pi}}$.