

Ordre des exercices : 4, 3, 1, 2, 6, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :

$\sum_{n=0}^N u_n$ est une somme partielle, avec N fixé ; $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série convergente de terme général u_n ;

Enfin $\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n dont on ne connaît pas forcément la nature ;

- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ converge, il suffit de comparer $|u_n|$ au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ diverge, il suffit de savoir que u_n ne tend pas vers 0 (grossière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles (S_N) indépendamment de N par une même constante.

I. Exemples usuels

Exercice 1 ☆

Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge, en comparant son terme général à $\frac{1}{n}$.

Exercice 2 ☆

Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge, en comparant son terme général à $\frac{1}{n^{3/2}}$.

II. Applications directes du cours

Exercice 3 ☆ « Série géométrique »

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0} = (a^n)_{n \geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^N a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 ☆ « Série télescopique »

Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$,

où $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

On pourra remarquer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.

Exercice 5 ☆ « Série exponentielle »

Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{(i\pi)^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6 ☆ « Comparaison de séries »

Sachant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, quelle est la nature de

la série :

$\sum v_n$, pour $v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$?

$\sum w_n$, pour $w_n = \frac{1}{n^2}$ si n est multiple de 3, $w_n = 0$ sinon ?

III. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆☆

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $a_n = \frac{n}{n^2 + n^3}$

b) $b_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

c) $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

d) $d_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 8 ☆☆

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $x_n = \frac{2^n}{3^n}$

b) $y_n = \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$

c) $z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

d) $t_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ (avec $n \geq 2$)

Exercice 9 ☆☆ « Critère spécial »

Prouver que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N , pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

IV. Exercices

Exercice 10 ☆☆ Mines-Telecom 2017

Pour $\alpha > 0$ fixé, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 11 ☆☆ « reste d'une série convergente »

Soit $\alpha > 1$ fixé. Justifier que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

En déduire un équivalent simple à $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

V. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆☆☆ « Série de Bertrand »

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, de paramètres réels α et β , converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 \in]0, 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que lon précisera.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{2^n}$

Exercice 16 ☆☆☆ CCP PSI 2016

On définit la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ par : $u_k = \frac{1}{1+k^2}$.

1. Etablir la convergence de la série de terme général u_k .

$$\text{On note pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

en déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Comment ferait-on en Python pour calculer cette valeur approchée ?

Exercice 12 ☆☆ « sommes partielles d'une série divergente »

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, ($0 < \alpha < 1$);
2. $u_n = \ln n/n$

Exercice 13 ☆☆☆

Déterminer, selon les valeurs du réel α la nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 + (-1)^n n^{-\alpha})$.

2. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge.

Exercice 17 ☆☆☆

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer la série $\sum u_n$ a même nature que les séries :

1. Montrer la série $\sum u_n$ a même nature que la série : $\sum \ln(1 + u_n)$;
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge
indic. : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes partielles, ou bien l'inégalité $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Exercice 18 ☆☆☆☆

Soit (a_n) une suite décroissante de termes positifs telle que $\sum a_n$ converge.

1. En justifiant, démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq na_n \leq 2(S_n - S_{[n/2]})$.
2. En déduire que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. En déduire que la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$ converge.

Exercice 19 ☆☆☆

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; démontrer que pour

tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$, en déduire que

$s_n \sim \ln n$ quand n tend vers $+\infty$;

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = s_n - \ln n$, démontrer que (u_n) est une suite décroissante convergente de limite notée γ , prouver que $s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$;

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, démontrer que

$\sigma_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$, et que (σ_n) est une suite convergente et calculer sa limite; retrouver ce résultat en remarquant que $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$;

Exercice 20 ☆☆☆

Soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite (u_n) .

2. En déduire une expression de u_n en fonction de n ;

3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux u_n , $(-1)^n u_n$, u_n/n
(on pourra étudier la suite définie par :
 $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$)

4. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$

Exercice 21 ☆☆☆

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $\ln x = x - n$, a une solution unique dans $[1, +\infty[$ notée x_n , étudier la nature de $\sum (x_n)^\alpha$, pour α réel.

Exercice 22 ☆☆☆

Discuter selon la valeur des paramètres réels α, β la nature des séries suivantes de terme général :

- a) $a_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ b) $b_n = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\beta}$
c) $c_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ d) $d_n = (1+n^\alpha)^\beta$

Exercice 23 ☆☆☆☆

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$ où λ est réel et $\sum v_n$ est une série absolument convergente

1. Pour tout n , on pose $w_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) + \frac{\lambda}{n}$. Prouver que $\sum w_n$ est une série absolument convergente.

2. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\lambda}$, pour un réel $A > 0$.

3. Etudier $\sum \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \right)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 24 ☆☆☆

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes, démontrer que les séries de terme général $a_n = \sqrt{u_n v_n}$ et $b_n = \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ sont convergentes.

Exercice 25 ☆☆☆ Mines-Ponts : série divergente

Donner un équivalent de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 26 ☆☆☆ « Mines-Ponts »

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 27 ☆☆☆ « Mines-Ponts »

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \geq 1$,

$$v_n = \left(n + \left((n-1) + \left(\dots + (2 + 1^{\frac{1}{4}}) \dots \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Donner la limite de la suite (v_n) .

Montrer que $v_n = O(n^{\frac{1}{4}})$.

Exercice 28 ☆☆☆ « Mines-Ponts »

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}.$$

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 29 ☆☆☆☆ CCP MP 2017

On définit la suite (u_n) par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a et b sont des réels strictement positifs. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et calculer sa somme en cas de convergence.

Indication : Étudier la suite (v_n) définie par : $v_n = (n+b-1)u_n$

Exercice 30 ☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \text{ et } v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. On notera ℓ la somme de cette série.

2. A l'aide d'un encadrement par des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, montrer que :

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{\sin t}{t} dt = \ell. \text{ Commentaire.}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $|\sin t| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. En déduire une minoration de v_k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. Donner la nature de la série $\sum_{k \geq 0} v_k$. Commentaire.

VI. Produit de Cauchy

Exercice 31 ☆☆

Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{N=0}^{+\infty} (N+1)x^N$$

Exercice 32 ☆☆

Soit $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\forall n \geq 1$.

Justifier que les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ sont convergentes, mais que leur série produit de Cauchy $\sum_{k \geq 1} w_k$ diverge, avec

$$\forall k \geq 1, w_k = \sum_{p=1}^k u_p w_{k-p}.$$

VII. Constante d'Euler

Exercice 33 ☆☆

Pour tout $n \geq 1$, on note $w_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq w_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que la série $\sum w_n$ converge, on notera E sa somme.
3. En déduire que $\ln N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} E + o(1)$, puis que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N - 1 + E + o(1),$$

c'est à dire $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1) \quad (\mathcal{E})$, où $\gamma = E - 1 > 0$ est appelé constante d'Euler.

VIII. Formule de Stirling

Exercice 34 ☆☆☆

On admet (c.f. exercice précédent) que $s_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln N$

1. *Premier Développement asymptotique de $\ln(n!)$*

(a) Pour $n \geq 1$, comparer $\ln k$, $\int_k^{k+1} \ln t dt$ et $\ln(k+1)$.

(b) En sommant les inégalités de droite pour k allant de 1 à $N-1$, en déduire que $N \ln N - N \leq \ln N!$

En sommant les inégalités de gauche pour k allant de 1 à $N-1$, en déduire que $\ln N! \leq N \ln N - N + t_N$ où $T_N \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(\ln N)$

(c) En déduire que $\ln(N!) = N \ln N - N + O(\ln N)$, soit $N! \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{N^N}{e^N} e^{O(\ln N)}$.

2. *Raffinement : développement asymptotique de $\ln(n!) - n \ln n + n$*

(a) En posant $v_n = \ln(n!) - n \ln n + n$, et à l'aide de développements limités, montrer que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n} + r_n, \text{ où } r_n = O(1/n^2) \text{ est le reste d'une série convergente.}$$

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} v_{n+1} - v_n$ converge, et en notant S sa somme, que

$$v_N - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln N + \frac{\gamma}{2} + S + o(1), \text{ en utilisant la constante d'Euler}$$

De sorte que, pour $\ell = 1 + \gamma/2 + S$, on a montré que :

$$\ln(N!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \ell + o(1)$$

(c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ que l'on exprimera en fonction de ℓ que :

$$N! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (*)$$

3. *Intégrales de Wallis* On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

(a) i. Calculer W_0 et W_1 . Pour $k \geq 2$, établir une relation entre W_k et W_{k-2} .

ii. En déduire les formules $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

iii. A l'aide de (*), en déduire que $W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2p} C}$ (1)

(b) Justifier que la suite (W_n) est décroissante et positive, et pour tout $n \geq 0$, $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$

(c) En déduire que

$$W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

(d) En déduire la formule $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, puis $W_{2p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2p}}$ (2).

(e) En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Notes

³ correction : pour $a \neq 1$, $S_N = \frac{a^0 - a^{N+1}}{1 - a}$. il y a convergence ssi $a^{N+1} \rightarrow 0$ c'est à dire ssi $|a| < 1$, vers $\frac{1}{1 - a}$.

¹⁵ correction :

1. $\ell = 0$

2. apcr, $u_{n+1} \leq \frac{1 + 1/2}{2} u_n$ et majoration par $O((3/4)^n)$

3. $\sum \ln(1 + u_k)$ CV, car a même nature que $\sum u_k$, on a donc $u_n = \frac{u_0}{2^n} \times \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$; $K = \lim_n u_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$

²⁵ correction : équivalent à $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln 2)$

²⁶ correction : $|u_{n+1}| \rightarrow 0$, par DL2, $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

²⁷ correction : diverge car $v_n^4 \geq n$, par réc $v_n^4 e(2n)^{1/4}$ car $(2x + 2)^{1/4} \leq x$ pour $x \geq 2$

²⁸ correction : $|u_{n+1}| \rightarrow 0$, par DL2, $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

²⁹ correction : $v_{n+1} - v_n = (a + b - 1)u_n$.

Cas $a + b - 1 = 0$: $u_n = \frac{n - b + 1}{n}$

Cas $a + b - 1 \neq 0$ $\sum u_n$ CV ssi $\sum (v_{k+1} - v_k)$ CV ssi (V_N) CV vers une limite L , auquel cas $u_n \sim L/n$. Si $L \neq 0$ DV. Si $L = 0$, $u_n = o(1)/n$

³³ correction :

1. Pour $t \in [n, n + 1]$, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{n + 1}$ donc par croissance de l'intégrale, $\frac{1}{n} \geq w_n \geq 0$ et $0 \leq w_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$.

2. Par comparaison entre séries positives, comme la série télescopique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$ converge vers 1 (sommes partielles), alors la série $\sum w_n$ converge.

3. En sommant pour n de 1 à $N - 1$, on a bien, par Chasles, avec $\int_1^N = \frac{1}{t} dt \ln N$: $\sum_{n=1}^{N-1} w_n = \ln N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n + 1} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} E + o(1)$

Ainsi $\ln N - 1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = E + o(1)$, d'où le résultat. $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N - 1 + E + o(1) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1)$, où $\gamma = E - 1 > 0$ est la constante d'Euler.

³⁴ correction :

1. (a) Pour $t \in [n, n + 1]$, $\ln(k) \leq \ln t \leq \ln(k + 1)$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln t dt \leq \ln(k + 1)$$

(b) En sommant pour k allant de 1 à $N - 1$,

$$\ln((N - 1)!) = \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k) \underset{(G)}{\leq} \int_1^N \ln t dt \underset{(D)}{\leq} \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k + 1) = \ln(N!)$$

Ainsi, comme $t \mapsto t \ln t - t$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \ln t$, on obtient

$$N \ln N - N \underset{(D)}{\leq} \ln(N!) \underset{(G)}{\leq} (N + 1) \ln(N + 1) - (N + 1) - 2 \ln 2 + 2 = N \ln N + O(\ln N)$$

Ainsi $\ln(N!) = N \ln N - N + O(\ln N)$.

(c) En posant $v_n = \ln(n!) - n \ln n + n$, on calcule

$$v_{n+1} - v_n = \ln((n + 1) \times n!) - (n + 1) \ln(n + 1) + (n + 1) - \ln(n!) + n \ln n - n$$

$$= \ln(n + 1) + \ln(n!) - n \ln(n + 1/n) - \ln(n + 1) + (n + 1) - \ln(n!) + n \ln n - n$$

$$= -n \ln(1 + 1/n) + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n[1/n - 1/(2n^2) + O(1/n^3)] = \frac{1}{2n} + r_n, \text{ où } r_n = O(1/n^2) \text{ est le reste d'une série convergente.}$$

On en déduit que la série télescopique $\sum_{n \geq 1} v_{n+1} - v_n$ converge, et en notant S sa somme, que

$$\ln(N!) - N \ln N + N - 1 = v_N - v_1 = \sum_{n=1}^{N-1} v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} r_n$$

c'est à dire $v_N - 1 = \frac{1}{n \rightarrow +\infty} \ln N + \frac{\gamma}{2} + S + o(1)$, en utilisant la constante d'Euler

(d) Ainsi, pour $\ell = 1 + \gamma/2 + S$, on a montré que :

$$\ln(N!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \ell + o(1)$$

et en passant à l'exponentielle, $N! = e^{N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \ell + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \sqrt{N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{o(1)}$ (F)

C'est à dire $N! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \sqrt{N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$ (*)

2. (a) i. $W_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 dx = \frac{\pi}{2}$, et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

Soit $n \geq 2$: $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx$
 $\underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx = W_{n-2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} \cos x \times \cos x dx$
 $\underset{\text{I.P.P.}}{=} W_{n-2} - \left(\left[\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \cos x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \times (-\sin x) dx \right)$

Donc : $\forall n \geq 2, W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1} W_{n-2}$, ce qui fournit la relation de récurrence : $\forall n \geq 2, W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ (R).

ii. On montre alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété \mathcal{P}_p : « $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$ »

initialisation : $W_0 = \frac{\pi}{2}$.

hérédité : supposons \mathcal{P}_p pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),

$$W_{2p+2} = \frac{2p+2-1}{2p+2} W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \underset{\mathcal{P}_p}{=} \frac{(2p+1)}{2(p+1)} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}, \text{ d'où } \mathcal{P}_{p+1}.$$

On montre de même par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété \mathcal{Q}_p : « $W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ »

initialisation : $W_1 = 1$.

hérédité : supposons \mathcal{Q}_p pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),

$$W_{2p+3} = \frac{2p+3-1}{2p+3} W_{2p+1} \underset{\mathcal{Q}_p}{=} \frac{(2p+2)}{(2p+3)} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{[2(p+1)]^2}{(2p+3)(2p+2)} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}, \text{ d'où } \mathcal{Q}_{p+1}.$$

Ainsi : $\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$, et $W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$

iii. Soit $p \in \mathbb{N}$, d'après la formule (*) : $W_{2p} \underset{1.}{=} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2p}(2p)^{2p} e^{-2p} e^K}{2^{2p} (\sqrt{pp}^p e^{-pe^K})^2} \frac{\pi}{2}$, donc

$$W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2pe^K}} \quad (b)$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0, \pi/2], 0 \leq \sin x \leq 1$, donc $\sin(x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$.

Par croissance de l'intégrale, on a donc $W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+1} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = W_n$

donc la suite (W_n) est décroissante.

Soit $n \geq 1$. On a en particulier $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$. Comme $W_n \geq 0$, on en déduit que :

$$\forall n \geq 1, W_n W_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_n W_{n-1}.$$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n = 2p, W_n W_{n+1} = W_{2p} W_{2p+1} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2p)}$.

Pour $n = 2p+1 : W_n W_{n+1} = W_{2p+1} W_{2p+2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} = \frac{(2p+2)\pi}{2^2(p+1)^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2p+1)}$.

Donc $W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$

(d) D'après le 2b), $W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} (1 + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. De même $W_{n-1} W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi + o(1)}{2n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. L'encadrement précédent montre

que la suite (nW_n^2) converge, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$. Comme $W_n \geq 0, \forall n \geq 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

d'où $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, puis $W_{2p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2p}}$ (2)

(e) De (1) et (2) on déduit que $\sqrt{\frac{\pi}{4p}} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2pe^K}}$, donc $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{e^K}$. Conclusion $e^K = \sqrt{2\pi}$.