

Ordre des exercices : 4, 3, 1, 2, 6, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :

$\sum_{n=0}^N u_n$  est une somme partielle, avec  $N$  fixé ;  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  désigne la somme de la série convergente de terme général  $u_n$  ;

Enfin  $\sum_{n \geq 0} u_n$  désigne la série de terme général  $u_n$  dont on ne connaît pas forcément la nature ;

- Pour justifier qu'une série  $\sum u_n$  converge, il suffit de comparer  $|u_n|$  au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série  $\sum u_n$  diverge, il suffit de savoir que  $u_n$  ne tend pas vers 0 (grossière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique  $\sum n^{-1}$  diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles  $(S_N)$  indépendamment de  $N$  par une même constante.

## I. Exemples usuels

### Exercice 1 ☆

Justifier que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$  diverge, en comparant son terme général à  $\frac{1}{n}$ .

### Exercice 2 ☆

Justifier que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$  converge, en comparant son terme général à  $\frac{1}{n^{3/2}}$ .

## II. Applications directes du cours

### Exercice 3 ☆ « Série géométrique »

Soit  $a > 0$  et  $(u_n)_{n \geq 0} = (a^n)_{n \geq 0}$ . Calculer les sommes partielles  $S_N = \sum_{i=0}^N a^i$ , pour  $N \in \mathbb{N}$ . Nature de  $\sum u_n$ .

### Exercice 4 ☆ « Série télescopique »

Etudier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ ,

où  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

On pourra remarquer que  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

### Exercice 5 ☆ « Série exponentielle »

Montrer que la série de terme général  $v_n = \frac{(i\pi)^n}{n!}$  converge et calculer sa somme.

### Exercice 6 ☆ « Comparaison de séries »

Sachant que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente, quelle est la nature de

la série :  $\sum v_n$ , pour  $v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$  ?

$\sum w_n$ , pour  $w_n = \frac{1}{n^2}$  si  $n$  est multiple de 3,  $w_n = 0$  sinon ?

## III. A savoir rédiger

### Exercice 7 ☆☆

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a)  $a_n = \frac{n}{n^2 + n^3}$       b)  $b_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$   
 c)  $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$       d)  $d_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

### Exercice 8 ☆☆

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a)  $x_n = \frac{2^n}{3^n}$       b)  $y_n = \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$   
 c)  $z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$       d)  $t_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$  (avec  $n \geq 2$ )

**Exercice 9** ☆☆ « Critère spécial »

Prouver que  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$  converge. En notant  $S$  sa somme, déterminer un entier  $N$ , pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

en déduire une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-2}$  près.  
**Comment ferait-on en Python** pour calculer cette valeur approchée ?

## IV. Exercices

**Exercice 10** ☆☆ Mines-Telecom 2017

Pour  $\alpha > 0$  fixé, on pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

**Exercice 11** ☆☆ « reste d'une série convergente »

Soit  $\alpha > 1$  fixé. Justifier que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

En déduire un équivalent simple à  $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

**Exercice 12** ☆☆ « sommes partielles d'une série divergente »

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en  $+\infty$  des sommes partielles d'ordre  $n$  des séries suivantes de terme général  $u_n$  :

- $u_n = 1/n^\alpha$ , ( $0 < \alpha < 1$ );
- $u_n = \ln n/n$

**Exercice 13** ☆☆☆

Déterminer, selon les valeurs du réel  $\alpha$  la nature de la série de terme général  $u_n = \ln(1 + (-1)^n n^{-\alpha})$ .

## V. Pour aller plus loin

**Exercice 14** ☆☆☆ « Série de Bertrand »

Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ , de paramètres réels  $\alpha$  et  $\beta$ , converge ssi  $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ )

**Exercice 15** ☆☆☆

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 \in ]0, 1[ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

- Montrer que  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$  que lon précisera.
- Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$
- Montrer qu'il existe  $K > 0$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{2^n}$

**Exercice 16** ☆☆☆ CCP PSI 2016

On définit la suite  $(u_k)_{k \geq 0}$  par :  $u_k = \frac{1}{1+k^2}$ .

- Etablir la convergence de la série de terme général  $u_k$ .

On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

- Montrer que :  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge.

**Exercice 17** ☆☆☆

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels strictement positifs. Montrer la série  $\sum u_n$  a même nature que les séries :

- Montrer la série  $\sum u_n$  a même nature que la série :  $\sum \ln(1 + u_n)$ ;
- Montrer que si  $\sum u_n$  converge, alors  $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$  converge  
*indic. : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes partielles, ou bien l'inégalité  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$*

**Exercice 18** ☆☆☆☆

Soit  $(a_n)$  une suite décroissante de termes positifs telle que  $\sum a_n$  converge.

- En justifiant, démontrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq na_n \leq 2(S_n - S_{[n/2]})$ .
- En déduire que  $na_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- En déduire que la série  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  converge.

**Exercice 19** ☆☆☆

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ; démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ , en déduire que  $s_n \sim \ln n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ;
- 2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = s_n - \ln n$ , démontrer que  $(u_n)$  est une suite décroissante convergente de limite notée  $\gamma$ , prouver que  $s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ ;
- 3) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$   $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ , démontrer que  $\sigma_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$ , et que  $(\sigma_n)$  est une suite convergente et calculer sa limite; retrouver ce résultat en remarquant que  $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$ ;

**Exercice 20** ☆☆☆

Soit  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite  $(u_n)$ .
2. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ ;
3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux  $u_n$ ,  $(-1)^n u_n$ ,  $u_n/n$   
(on pourra étudier la suite définie par :  $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$ )
4. Déterminer la somme de la série de terme général  $(-1)^n u_n$

**Exercice 21** ☆☆☆

Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'équation  $\ln x = x - n$ , a une solution unique dans  $[1, +\infty[$  notée  $x_n$ , étudier la nature de  $\sum (x_n)^\alpha$ , pour  $\alpha$  réel.

**Exercice 22** ☆☆☆

Discuter selon la valeur des paramètres réels  $\alpha, \beta$  la nature des séries suivantes de terme général :

- a)  $a_n = \alpha^{\sqrt{n}}$     b)  $b_n = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\beta}$   
 c)  $c_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$     d)  $d_n = (1+n^\alpha)^\beta$

**Exercice 23** ☆☆☆☆

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$  où  $\lambda$  est réel et  $\sum v_n$  est une série absolument convergente

1. Pour tout  $n$ , on pose  $w_n = \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) + \frac{\lambda}{n}$ . Prouver que  $\sum w_n$  est une série absolument convergente.

2. En déduire que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\lambda}$ , pour un réel  $A > 0$ .

3. Etudier  $\sum \left( \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \right)^\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

**Exercice 24** ☆☆☆

Soient  $\sum u_n$ ,  $\sum v_n$  deux séries à termes strictement positifs convergentes, démontrer que les séries de terme général  $a_n = \sqrt{u_n v_n}$  et  $b_n = \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$  sont convergentes.

**Exercice 25** ☆☆☆ Mines-Ponts : série divergente

Donner un équivalent de  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$ .

**Exercice 26** ☆☆☆ « Mines-Ponts »

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$ .

Nature de la série de terme général  $u_n$  ?

**Exercice 27** ☆☆☆ « Mines-Ponts »

On considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $\forall n \geq 1$ ,

$$v_n = \left( n + \left( (n-1) + \left( \dots + (2 + 1^{\frac{1}{4}}) \dots \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Donner la limite de la suite  $(v_n)$ .

Montrer que  $v_n = O(n^{\frac{1}{4}})$ .

**Exercice 28** ☆☆☆ « Mines-Ponts »

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 \in \mathbb{R}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}.$$

Nature de la série de terme général  $u_n$  ?

**Exercice 29** ☆☆☆☆ CCP MP 2017

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs. Déterminer la nature de  $\sum u_n$  et calculer sa somme en cas de convergence.

Indication : Étudier la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = (n+b-1)u_n$

**Exercice 30** ☆☆☆☆

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \text{ et } v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge. On notera  $\ell$  la somme de cette série.

2. A l'aide d'un encadrement par des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , montrer que :

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{\sin t}{t} dt = \ell. \text{ Commentaire.}$$

3. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $t \in [k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$ ,  $|\sin t| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

4. En déduire une minoration de  $v_k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

5. Donner la nature de la série  $\sum_{k \geq 0} v_k$ . Commentaire.

## VI. Produit de Cauchy

**Exercice 31** ☆☆

Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{N=0}^{+\infty} (N+1)x^N$$

**Exercice 32** ☆☆

Soit  $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Justifier que les séries  $\sum_{n \geq 1} u_n$  et  $\sum_{n \geq 1} v_n$  sont convergentes, mais que leur série produit de Cauchy  $\sum_{k \geq 1} w_k$  diverge, avec

$$\forall k \geq 1, w_k = \sum_{p=1}^k u_p w_{k-p}.$$

## VII. Constante d'Euler

### Exercice 33 ☆☆

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $w_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n+1}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq w_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .
2. En déduire que la série  $\sum w_n$  converge, on notera  $E$  sa somme.
3. En déduire que  $\ln N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} E + o(1)$ , puis que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N - 1 + E + o(1),$$

c'est à dire  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1) \quad (\mathcal{E})$ , où  $\gamma = E - 1 > 0$  est appelé constante d'Euler.

## VIII. Formule de Stirling

### Exercice 34 ☆☆☆

On admet (c.f. exercice précédent) que  $s_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln N$

1. *Premier Développement asymptotique de  $\ln(n!)$*

(a) Pour  $n \geq 1$ , comparer  $\ln k$ ,  $\int_k^{k+1} \ln t dt$  et  $\ln(k+1)$ .

(b) En sommant les inégalités de droite pour  $k$  allant de 1 à  $N-1$ , en déduire que  $N \ln N - N \leq \ln N!$

En sommant les inégalités de gauche pour  $k$  allant de 1 à  $N-1$ , en déduire que  $\ln N! \leq N \ln N - N + t_N$  où  $T_N \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(\ln N)$

(c) En déduire que  $\ln(N!) = N \ln N - N + O(\ln N)$ , soit  $N! \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{N^N}{e^N} e^{O(\ln N)}$ .

2. *Raffinement : développement asymptotique de  $\ln(n!) - n \ln n + n$*

(a) En posant  $v_n = \ln(n!) - n \ln n + n$ , et à l'aide de développements limités, montrer que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n} + r_n, \text{ où } r_n = O(1/n^2) \text{ est le reste d'une série convergente.}$$

(b) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} v_{n+1} - v_n$  converge, et en notant  $S$  sa somme, que

$$v_N - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln N + \frac{\gamma}{2} + S + o(1), \text{ en utilisant la constante d'Euler}$$

De sorte que, pour  $\ell = 1 + \gamma/2 + S$ , on a montré que :

$$\ln(N!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \ell + o(1)$$

(c) En déduire l'existence d'une constante  $C > 0$  que l'on exprimera en fonction de  $\ell$  que :

$$N! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (*)$$

3. *Intégrales de Wallis* On pose  $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$ .

(a) i. Calculer  $W_0$  et  $W_1$ . Pour  $k \geq 2$ , établir une relation entre  $W_k$  et  $W_{k-2}$ .

ii. En déduire les formules  $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$  et  $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

iii. A l'aide de (\*), en déduire que  $W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2p} C}$  (1)

(b) Justifier que la suite  $(W_n)$  est décroissante et positive, et pour tout  $n \geq 0$ ,  $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$

(c) En déduire que

$$W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

(d) En déduire la formule  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ , puis  $W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2p}}$  (2).

(e) En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

# Notes

<sup>3</sup> correction : pour  $a \neq 1$ ,  $S_N = \frac{a^0 - a^{N+1}}{1 - a}$ . il y a convergence ssi  $a^{N+1} \rightarrow 0$  c'est à dire ssi  $|a| < 1$ , vers  $\frac{1}{1 - a}$ .

<sup>15</sup> correction :

1.  $\ell = 0$

2. apcr,  $u_{n+1} \leq \frac{1 + 1/2}{2} u_n$  et majoration par  $O((3/4)^n)$

3.  $\sum \ln(1 + u_k)$  CV, car a même nature que  $\sum u_k$ , on a donc  $u_n = \frac{u_0}{2^n} \times \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$ ;  $K = \lim_n u_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k)$

<sup>25</sup> correction : équivalent à  $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln 2)$

<sup>26</sup> correction :  $|u_{n+1}| \rightarrow 0$ , par DL2,  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

<sup>27</sup> correction : diverge car  $v_n^4 \geq n$ , par réc  $v_n^4 e(2n)^{1/4}$  car  $(2x + 2)^{1/4} \leq x$  pour  $x \geq 2$

<sup>28</sup> correction :  $|u_{n+1}| \rightarrow 0$ , par DL2,  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

<sup>29</sup> correction :  $v_{n+1} - v_n = (a + b - 1)u_n$ .

Cas  $a + b - 1 = 0$  :  $u_n = \frac{n - b + 1}{n}$

Cas  $a + b - 1 \neq 0$   $\sum u_n$  CV ssi  $\sum (v_{k+1} - v_k)$  CV ssi  $(V_N)$  CV vers une limite  $L$ , auquel cas  $u_n \sim L/n$ . Si  $L \neq 0$  DV. Si  $L = 0$ ,  $u_n = o(1)/n$

<sup>33</sup> correction :

1. Pour  $t \in [n, n + 1]$ ,  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{n + 1}$  donc par croissance de l'intégrale,  $\frac{1}{n} \geq w_n \geq 0$  et  $0 \leq w_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$ .

2. Par comparaison entre séries positives, comme la série télescopique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$  converge vers 1 (sommes partielles), alors la série  $\sum w_n$  converge.

3. En sommant pour  $n$  de 1 à  $N - 1$ , on a bien, par Chasles, avec  $\int_1^N = \frac{1}{t} dt \ln N$  :  $\sum_{n=1}^{N-1} w_n = \ln N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n + 1} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} E + o(1)$

Ainsi  $\ln N - 1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = E + o(1)$ , d'où le résultat.  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N - 1 + E + o(1) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1)$ , où  $\gamma = E - 1 > 0$  est la constante d'Euler.

<sup>34</sup> correction :

1. (a) Pour  $t \in [n, n + 1]$ ,  $\ln(k) \leq \ln t \leq \ln(k + 1)$ , donc par croissance de l'intégrale,

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln t dt \leq \ln(k + 1)$$

(b) En sommant pour  $k$  allant de 1 à  $N - 1$ ,

$$\ln((N - 1)!) = \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k) \underset{(G)}{\leq} \int_1^N \ln t dt \underset{(D)}{\leq} \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k + 1) = \ln(N!)$$

Ainsi, comme  $t \mapsto t \ln t - t$  est une primitive sur  $]0, +\infty[$  de  $t \mapsto \ln t$ , on obtient

$$N \ln N - N \underset{(D)}{\leq} \ln(N!) \underset{(G)}{\leq} (N + 1) \ln(N + 1) - (N + 1) - 2 \ln 2 + 2 = N \ln N + O(\ln N)$$

Ainsi  $\ln(N!) = N \ln N - N + O(\ln N)$ .

(c) En posant  $v_n = \ln(n!) - n \ln n + n$ , on calcule

$$v_{n+1} - v_n = \ln((n + 1) \times n!) - (n + 1) \ln(n + 1) + (n + 1) - \ln(n!) + n \ln n - n$$

$$= \ln(n + 1) + \ln(n!) - n \ln(n + 1/n) - \ln(n + 1) + (n + 1) - \ln(n!) + n \ln n - n$$

$$= -n \ln(1 + 1/n) + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n[1/n - 1/(2n^2) + O(1/n^3)] = \frac{1}{2n} + r_n, \text{ où } r_n = O(1/n^2) \text{ est le reste d'une série convergente.}$$

On en déduit que la série télescopique  $\sum_{n \geq 1} v_{n+1} - v_n$  converge, et en notant  $S$  sa somme, que

$$\ln(N!) - N \ln N + N - 1 = v_N - v_1 = \sum_{n=1}^{N-1} v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} r_n$$

c'est à dire  $v_N - 1 = \frac{1}{n \rightarrow +\infty} \ln N + \frac{\gamma}{2} + S + o(1)$ , en utilisant la constante d'Euler

(d) Ainsi, pour  $\ell = 1 + \gamma/2 + S$ , on a montré que :

$$\ln(N!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \ell + o(1)$$

et en passant à l'exponentielle,  $N! = e^{N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \ell + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} K \sqrt{N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{o(1)}$  (F)

C'est à dire  $N! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \sqrt{N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$  (\*)

2. (a) i.  $W_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 dx = \frac{\pi}{2}$ , et  $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$ .

Soit  $n \geq 2$  :  $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx$   
 $\underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx = W_{n-2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} \cos x \times \cos x dx$   
 $\underset{\text{I.P.P.}}{=} W_{n-2} - \left( \left[ \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \cos x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \times (-\sin x) dx \right)$

Donc :  $\forall n \geq 2, W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1} W_{n-2}$ , ce qui fournit la relation de récurrence :  $\forall n \geq 2, W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$  (R).

ii. On montre alors par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}_p$  : «  $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$  »

initialisation :  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ .

hérédité : supposons  $\mathcal{P}_p$  pour un entier  $p \in \mathbb{N}$ . d'après (R),

$$W_{2p+2} = \frac{2p+2-1}{2p+2} W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \underset{\mathcal{P}_p}{=} \frac{(2p+1)}{2(p+1)} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}, \text{ d'où } \mathcal{P}_{p+1}.$$

On montre de même par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{Q}_p$  : «  $W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$  »

initialisation :  $W_1 = 1$ .

hérédité : supposons  $\mathcal{Q}_p$  pour un entier  $p \in \mathbb{N}$ . d'après (R),

$$W_{2p+3} = \frac{2p+3-1}{2p+3} W_{2p+1} \underset{\mathcal{Q}_p}{=} \frac{(2p+2)}{(2p+3)} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{[2(p+1)]^2}{(2p+3)(2p+2)} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}, \text{ d'où } \mathcal{Q}_{p+1}.$$

Ainsi :  $\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$ , et  $W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$

iii. Soit  $p \in \mathbb{N}$ , d'après la formule (\*) :  $W_{2p} \underset{1.}{=} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2p}(2p)^{2p} e^{-2p} e^K}{2^{2p} (\sqrt{pp}^p e^{-pe^K})^2} \frac{\pi}{2}$ , donc

$$W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2pe^K}} \quad (b)$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\forall x \in [0, \pi/2], 0 \leq \sin x \leq 1$ , donc  $\sin(x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$ .

Par croissance de l'intégrale, on a donc  $W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+1} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = W_n$

donc la suite  $(W_n)$  est décroissante.

Soit  $n \geq 1$ . On a en particulier  $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ . Comme  $W_n \geq 0$ , on en déduit que :

$$\forall n \geq 1, W_n W_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_n W_{n-1}.$$

(c) Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 2p, W_n W_{n+1} = W_{2p} W_{2p+1} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2p)}$ .

Pour  $n = 2p+1 : W_n W_{n+1} = W_{2p+1} W_{2p+2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} = \frac{(2p+2)\pi}{2^2(p+1)^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2p+1)}$ .

Donc  $W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$

(d) D'après le 2b),  $W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2n} (1 + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ . De même  $W_{n-1} W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi + o(1)}{2n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ . L'encadrement précédent montre

que la suite  $(nW_n^2)$  converge, et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$ . Comme  $W_n \geq 0, \forall n \geq 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,

d'où  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ , puis  $W_{2p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2p}}$  (2)

(e) De (1) et (2) on déduit que  $\sqrt{\frac{\pi}{4p}} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2pe^K}}$ , donc  $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{e^K}$ . Conclusion  $e^K = \sqrt{2\pi}$ .