Pré-requis

Espaces vectoriels usuels $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{R}_N[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Familles libres, liées. Bases en dimension finie. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Supplémentaires.

Applications linéaires, noyau, image.

Objectifs

Généraliser les décompositions uniques dans un espace vectoriel de dimension finie selon une somme directe de deux ou plus sous-espaces vectoriels. Notion de sous-espaces stables et propriétésmatricielles dans une base adaptée.

Déterminant et calculs par blocs, Trace.

I. Rappels de PCSI sur les espaces vectoriels

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I.1 Rappels de PCSI : sous-espaces vectoriels

Définition 1.

Un ensemble E est dit $\mathbb{K}$-**espace vectoriel**, pour les lois d'addition (interne) $+$ et de produit (externe)$\cdot$ si :

- E **non vide**, et est stable pour la loi $+$, qui est commutative et associative, admet un élément neutre 0_E, et tout élément x de E admet un opposé $-x$ tel que $x + (-x) = 0_E$
- E est stable par multiplication à gauche par un scalaire par la loi $\cdot$, qui est distributive par rapport à l'addition, associative par rapport à la multiplication dans $\mathbb{K}$, admet pour élément neutre multiplicatif $1_{\mathbb{K}}$

exemple 1. $\mathbb{R}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i;\ d \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \right\}$

exemple 2. $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n};\ (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \right\}$.

Remarque 1. En pratique, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on montre qu'il est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) d'un espace-vactoriel le contenant :

- **non vide** et contenu dans un espace vectoriel de référence ($\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$ ...)
- **stable par combinaison linéaire** (i.e. $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F$)

exemple 3. $\mathbb{R}_2[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i X^i;\ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}[X]$

exemple 4. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R});\ S^T = S \right\} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

I.2 Rappels de PCSI : somme de deux s.-e.v.

Définition 2.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F, G deux s-e.v. de E. On appelle **somme** des sous-espaces-vectoriels F et G le $\mathbb{R}$-e.v. noté $F + G$ défini par :
$F + G = \{f + g;\ \forall i \in [\![1, s]\!],\ f \in F,\ g \in G\}$

exemple 5. $\mathbb{R}_1[X] = \left\{ a_0 + a_1 X;\ (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$

exemple 6. $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

I.3 Rappels de PCSI : sommes directes et supplémentaires

Définition 3 (Sous-espaces supplémentaires).

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont dits **supplémentaires** si : $E = F \oplus G$
i.e. si : $\forall x \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G;\ x = f + g$

Définition 4 (Somme directe).

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et F, G deux s-e.v. de E.
On dit que la somme $F + G$ de sous-espaces-vectoriels est une **somme directe** si :
$\forall (f,g) \in F \times G,\ (0_E = f + g \Rightarrow,\ f = g = 0_E)$.
Si tel est le cas, on note

$$F + G = F \oplus G$$

Remarque 2. Pour une somme directe $F \oplus G$ de s.e.v. de E, on a toujours $F \oplus G \subset E$

Proposition 1 (C.N.S. de décomposition en somme directe).

Soient F et G sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $E = F \oplus G$

ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$

démonstration : • Supposons i).
pour $x \in F \cap G$, on a $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G} = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$, donc par unicité de la décomposition, $0 = x$ (et $0 = -x$), donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est toujours vraie pour des s.-e.v. .

• Supposons ii).

l'existence de décomposition dans $F + G$ est automatique. Pour $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$ tels que $f_1 + g_1 + f_2 + g_2$, on a $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G$, donc $f_1 - f_2 = 0_E = g_2 - g_1$, d'où l'unicité de la décomposition dans $F + G$: ainsi $F + G = F \oplus G$.

□

exemple 7. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$, avec $\mathcal{I} = \{f;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ et $\mathcal{P} = \{g;\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x)\}$

exemple 8. $\mathfrak{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{M;\ M^T = M\right\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{M;\ M^T = -M\right\}$

II. Sommes de plusieurs espaces vectoriels

II.1 Sommes sous-espaces vectoriels

Définition 5.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_s$ des s-e.v. de E. On appelle **somme** des sous-espaces-vectoriels $E_1, \ldots, E_s$ le $\mathbb{R}$-e.v. noté $\sum_{i=1}^{s} E_i$ défini par :

$$\sum_{i=1}^{s} E_i = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_s;\ \forall i \in [\![1, s]\!],\ x_i \in E_i\}$$

exemple 9. $\mathbb{R}_4[X] = \left\{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4;\ (a_0, \ldots, a_4) \in \mathbb{R}^5\right\} = \sum_{i=0}^{4} \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^i)$

Proposition 2.

Pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de E, $\sum_{i=1}^{d} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

démonstration : calcul direct pour $x = \sum_{i=1}^{s} x_i$, $y = \sum_{i=1}^{s} y_i$ et λ, on a $x + \lambda y = \sum_{i=1}^{s} (x_i + \lambda y_i)$. $\square$

Remarque 3. Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on note aussi $E_1 + E_2$ au lieu de $\sum_{i=1}^{2} E_i$.

II.2 Sommes directes de sous-espaces vectoriels

Définition 6 (Somme directe).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $\sum_{i=1}^{s} E_i$ de sous-espaces-vectoriels est une **somme directe** si :

$$\forall (x_i)_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^{s} E_i,\ \left(0_E = \sum_{i=1}^{s} x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1, s]\!],\ x_i = 0_E\right).$$

Si tel est le cas, on note

$$\sum_{i=1}^{s} E_i = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$$

Définition 7 (Décomposition en somme directe).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que E est en **somme directe** de $E_1, \dots, E_s$ si :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_i)_{1\leq i\leq s} \in \prod_{i=1}^{s} E_i;\ x = \sum_{i=1}^{s} x_i$$

Si tel est le cas, on note $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$

exemple 10. $\mathbb{R}_4[X] = \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4;\ (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5\right\} = \bigoplus_{i=0}^{4} \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^i)$
$= \mathbb{R}_1[X] \oplus \left\{(X^2 - 3X + 1)(a_0 + a_1X + a_2X^2);\ (a_0, \dots, a_2) \in \mathbb{R}^3\right\}$

II.3 Sommes directes et bases adaptées

Définition 8 (Base adaptée à une somme directe).

Etant donnée E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives $(d_i)_{1\leq i\leq s}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est une **base adaptée** à cette somme directe si ses éléments sont dans cet ordre de la forme $((e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}), \dots, (e_{s,1}, \dots, e_{s,d_s}))$, avec pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ base de E_i.

exemple 11. $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}_3[X] = \bigoplus_{i=0}^{3} \mathrm{Vect}(X^i)$.

exemple 12. $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,
adaptée à la somme directe $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Vect}((X - a)^i)$.

Proposition 3.

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension **finie**, $n \in \mathbb{N}$, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Alors $\boxed{\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i).}$

démonstration :

Pour tout i, on note $j_i = \dim(E_i)$, $M = \sum_{i=1}^{n} j_i$, et on se donne $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,j_i})$ une base de E_i. Il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_1)$ de M vecteurs de E est une base de E.

• <u>génératricité :</u> soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $(\lambda_{i,k})_{1\leq k\leq j_i} \in \mathbb{K}^{j_i}$ tels que $x_i = \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$. Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} \right)$. Ce pour tout x appartenant à E, d'où $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

• <u>liberté :</u> soit $(\lambda_{i,k})_{1\leq k\leq j_i,\ 1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^M$ un M-uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} \right) = 0_E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur $v_i = \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$ appartient à E_i, et comme la somme est directe, l'égalité $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0_E$ implique $v_i = 0_{E_i} = 0_E$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Mais alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} = 0_{E_i}$, et $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i donc est libre, donc $\lambda_{i,k} = 0$ pour tout $k \in [\![1, j_i]\!]$. Finalement, $\forall 1 \leq k \leq j_i,\ \ 1 \leq i \leq n,\ \lambda_{i,k} = 0_{\mathbb{K}}$, donc $\mathcal{B}$ est libre. □

Proposition 4 (CNS de somme directe).

Etant donnés p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots F_p$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on a : $\boxed{\dim \left(\sum_{i=1}^{p} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)}$

En outre, il y a égalité si est seulement si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

<u>démonstration :</u>

posons $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

En prenant des bases $\mathcal{B}_i$ des F_i, pour i allant de 1 à s, on obtient que la famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)$ est génératrice de $F = \sum_{i=1}^{s} F_i$, et possède $\sum_{i=1}^{s} \dim(F_i)$ éléments, donc $\dim \left(\sum_{i=1}^{p} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

• Si $\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = F$, la proposition précédente assure $\dim F = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

• Si $\dim F = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$, alors la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de F et a pour cardinal la dimension de F, donc est une base de F.

Comme elle est libre, toute décompostion d'un vecteur $x = \sum_{i=1}^{s} x_i$ dans la somme $\sum_{i=1}^{s} F_i$ peut être vue comme une décomposition unique dans la base $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)$, quitte à redécomposer chaque composante $x_i \in F_i$ selon $\mathcal{B}_i$. On en déduit que la somme $\sum_{i=1}^{s} F_i$ est directe. □

Remarque 4. ainsi $\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ si et seulement si $\dim \left(\sum_{i=1}^{p} F_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

III. Matrices par blocs, sous-espaces stables

III.1 Sous-espaces-stables par un endomorphisme

Définition 9.

Un sous-espace vectoriel F de l'espace vectoriel E est dit **stable** (ou invariant) par l'endomorphisme u appartenant à $\mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, i.e. : $\forall v \in F,\ u(v) \in F$.

Proposition 5.

Si F est un sous-espace vectoriel F de E stable par l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, alors l'application $F \to F,\ v \longmapsto u(v)$ est un endomorphisme de F.

démonstration : la linéarité est directement issue de celle de u sur E, et la stabilité assure le caractère endomorphisme. $\square$.

Définition 10.

Si F est un sous-espace vectoriel F de E stable par l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit l'**endomorphisme induit** par u sur F ; noté $u_{|F}^{|F}$ par :
$\forall \overrightarrow{x} \in F,\ u_{|F}^{|F}(\overrightarrow{x}) = u(\overrightarrow{x})$

Proposition 6.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par l'endomorphisme u si et seulement s'il existe B, D telles que : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} Mat_{\mathcal{B}_f}(u_{|F}^{|F}) & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$

démonstration : directement : F est stable par u si etseulement si $u(\mathcal{B}_F) \subset F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_F)$.

Proposition 7.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

démonstration :
Pour $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(u(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
Pour $x \in E$ et $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, on a
$u(y) = u(u(x))$, donc $u(y) \in \mathrm{Im}(u)$. $\square$

Proposition 8.

Si $u \circ v = v \circ u$ (i.e. si u et v commutent), alors $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v.

démonstration : Pour $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
□

Remarque 5. vrai pour l'image

exemple 13. $f : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ avec trigonalisation, les $\mathbb{R}_i[X]$ sont stables.

III.2 Matrices par blocs

Rappel : l'expression du coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$ de la matrice produit $R = MN$ de $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ est : $\boxed{(R)_{ij} = \sum_{k=1}^{q} m_{i,k} n_{k,j}}$

Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix}$, avec $A, S \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B, T \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $C, U \in \mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, $D, V \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$,

- on peut calculer “par blocs” de la manière suivante :
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS + BU & AT + AV \\ CS + DU & CT + DV \end{pmatrix}$$

Remarque 6. Dans le cas de matrices “diagonales par blocs”, on a simplement :
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS & 0 \\ 0 & DV \end{pmatrix}$$

- Les combinaison linéaires sont respectées.
- Transposées $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$

IV. Déterminants

IV.1 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice 2×2

Définition 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de A le scalaire, noté $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ou encore $\det A$ défini par : $\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$.

Définition 12.

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$. On appelle **mineur** d'indice ij de A le scalaire, noté A_{ij} défini par : $\boxed{A_{ij} = a_{3-i,3-j}}$.

IV.2 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice $n \times n$

Définition 13.

Pour tout entier $n \geq 3$ on définit par récurrence le **déterminant** d'une matrice $n \times n$ en posant, pour tout $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1}) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(A_{n1})$$

où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note A_{ij} la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en rayant dans A la ligne i et la colonne j.

Proposition 9 (dévpt. % à $j^{\text{ème}}$ colonne)**.**

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

Proposition 10 (dévpt. % à $i^{\text{ème}}$ ligne)**.**

$$\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det(A_{i\ell})$$

exemple 14. par rapport à la 1ère ligne : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Proposition 11 (opération du pivot de Gauss sur les colonnes).

Si $A = (C_1|\dots|C_n)$, on ne change pas le déterminant en faisant une opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$, pour des scalaires $(\lambda_j)_{j \neq j}$.

Proposition 12 (multiplication d'une colonne par un scalaire).

Si $A = (C_1|\dots|C_n)$ et $B = (C_1|\dots|\lambda C_{i_0}|\dots|C_n)$ s'en déduit en faisant l'opération $C_{i_0} \leftarrow \lambda C_{i_0}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(B) = \lambda \det(A)$

exemple 15. $\det(\lambda I_n) = \lambda^n \det(I_n) = \lambda^n$.

Proposition 13 (transposée).

Pour toute matrice carrée A, on a : $\det\left(A^T\right) = \det(A)$

Proposition 14 (CNS liberté).

Pour toute matrice carrée $A = (C_1|\dots|C_n)$.
$\det(A) \neq 0$ si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\det(A) \neq 0$ si et seulement A est inversible (i.e. si l'endomorphisme canoniquement associé est bijectif)

Remarque 7. Si $D = Diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p})$ alors

$\boxed{\det(D) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{m_k}}$ et D est inversible si et seulement si $0 \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

IV.3 Rappel : déterminant d'un produit

Proposition 15.

$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(AB) = \det(A)\det(B)$

démonstration : par récurrence sur la taille de A et développements par rapports aux colonnes de A.

Proposition 16.

$\forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

démonstration : Pour P inversible, $1 = \det(I_n) = \det(PP^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})$. $\square$

IV.4 Déterminants triangulaires par blocs

Proposition 17.

Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, on peut calculer "par blocs" de la manière suivante :

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)}$$

démonstration : à $r \in \mathbb{N}^*$ fixé, on procède par récurrence sur $p \geq 1$.

• Le cas $p = 1$, est direct, par développement par rapport à la première colonne de toute matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & B \\ 0_{r,1} & D \end{pmatrix}$.

• Supposons la propriété vraie pour toute matrice triangulaire par blocs avec un bloc supérieur gauche de taille inférieure ou égale à $p \times p$.

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p+1} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathfrak{M}_{p+1,p+1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p+1,r}(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, on obtient en développant par rapport à la première colonne : $\det(M) = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det M_{k,1} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det\begin{pmatrix} A_{k,1} & (\star) \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det(A_{k,1})\det(D) = \left(\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det(A_{k,1})\right)\det(D) = \det(A)\det(D)$. $\square$.

Remarque 8. Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

IV.5 Matrices semblables

Définition 14.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux matrices carrées M et N appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** (sur $\mathbb{K}$) , s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $N = P^{-1}MP$

Remarque 9. Si P est vue comme la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ (dont les vecteurs se décomposent dans la base canonique comme les colonnes de P), M et N représentent un même endomorphisme f, avec $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, et $\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Pass^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\ Mat_{\mathcal{B}}(f)\ Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$

Proposition 18.

Si M et N sont deux matrices semblables, alors $\det(M) = \det(N)$.

démonstration : Pour P inversible, $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$, donc
$\det(P^{-1}MP) = \det(P^{-1})\det(M)\det(P) = \det(M)\det(P^{-1})\det(P) = \det(M)$ $\square$

Remarque 10. la réciproque est fausse : 0_2 n'est pas semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 15.

Pour tout endomorphisme de E, on définit le déterminant de u, noté $\det(u)$ par :
$\boxed{\det(u) = \det(mat_{\mathcal{B}}(u))}$
où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

En effet, pour toute autre base $\mathcal{B}'$, en notant $P = Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, on a :
$\det(mat_{\mathcal{B}'}(u)) = \det(P^{-1}mat_{\mathcal{B}}(u)P) = \det(P^{-1}mat_{\mathcal{B}}(u)P) = \det(mat_{\mathcal{B}}(u))\det(P)\det(P^-1) = \det(mat_{\mathcal{B}}(u))$.

V. Trace

V.1 Définition

Définition 16.

Etant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$, on appelle **trace** de la matrice A le nombre, noté $\mathrm{Tr}(A)$ défini par : $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}}$

Remarque 11. Si $D = Diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p})$ alors $\boxed{\mathrm{Tr}(D) = \sum_{k=1}^{p} m_k\lambda_k}$ est la somme des coefficients diagonaux comptés avec multiplicité (nb d'occurrences).

V.2 Propriétés

Proposition 19 (linéarité de la trace)**.**

Pour tous $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda\,\mathrm{Tr}(B)$

Proposition 20 (trace de la transposée)**.**

Pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\left(A^T\right) = \mathrm{Tr}(A)$

Proposition 21 (trace d'un produit)**.**

Pour tous $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

démonstration : Pour $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $AB = C = (c_{ik})$ et $BA = D = (d_{j\ell})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \mathrm{Tr}(BA) \quad \square$$

Remarque 12. Attention, en général, $\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$; par exemple $\mathrm{Tr}(I_n^2) = n \neq \mathrm{Tr}(I_n)^2$ pour $n \geq 2$.

Remarque 13. Tr est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 22 (trace de matrices semblables)**.**

Deux matrices semblables ont même trace.
i.e. : si $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifient $N = P^{-1}MP$, alors $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(M)$

démonstration : $\mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}M) = \mathrm{Tr}(I_nM) = \mathrm{Tr}(M)$ □

Remarque 14. Si P est vue comme la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ (dont les vecteurs se décomposent dans la base canonique comme les colonnes de P), M et N représentent un même endomorphisme f, avec $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, on a $N = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Ainsi on obtient le même résultat en calculant le nombre Trace de la matrice correspondant à la matrice de f dans une base quelconque. $N = P^{-1}MP$

Définition 17.

Etant donnés $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **trace** de f le scalaire, noté $\mathrm{Tr}(f)$ défini par $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(mat_{\mathcal{B}}(f))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de l'espace vectoriel E de dimension finie.

VI. Propriétés avancées

VI.1 Produit fini d'espaces vectoriels

Définition 18.

Etant donnés p espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on défini leur ensemble **produit** :
$\prod_{i=1}^{p} E_i = \{(v_1, \dots, v_p);\ \forall\ 1 \leq i \leq p,\ v_i \in E_i\}$

Proposition 23.

Etant donnés p espaces vectoriels $(E_1, \dots, E_p)$ sur $\mathbb{K}$ leur produit $\left(\prod_{i=1}^{p} E_i, +_\pi, \cdot_\pi\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour les lois $+_\pi$ et $\cdot_\pi$ définies par :

$\forall (v_1, \dots, v_p), (w_1, \dots, w_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ (v_1, \dots, v_p) +_\pi (w_1, \dots, w_p) = (v_1 + w_1, \dots, v_p + w_p)$

$\forall (v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot_\pi (v_1, \dots, v_p) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_p)$

En outre, si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ E_i est de dimension finie égale à $d_i \in \mathbb{N}^*$, alors $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension $\sum_{i=1}^{p} d_i$.

démonstration : la vérification des propriétés de $\mathbb{K}$-e.v. est directe à partir des structures de $\mathbb{K}$-e.v. des $(E_i, +, \cdot)$.
Pour la dimension, ilsuffit de remarquer qu'étant données des bases $\mathcal{B}_i = (e_{i,k})_{1 \leq k \leq d_i}$, la famille
$\left(\left((\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, e_{i,k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-i})_{1 \leq k \leq d_i}\right)_{1 \leq i \leq p}\right)$ est libre et génératrice, et possède $\sum_{i=1}^{p} d_i$ éléments $\square$

Remarque 15. Etant donnés p sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ d'un même espace vectoriel E, l'application
$\varphi : \prod_{i=1}^{p} E_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} E_i;\ \varphi(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^{p} v_i$ définie par est une application linéaire.

Comme $\dim(\prod_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i) \geq \dim(\sum_{i=1}^{p} E_i)$

Elle est bijective ssi $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_i) = \dim(\sum_{i=1}^{p} E_i)$, d'après le théorème du rang.

Comme la bijectivité de φ est équivalente à l'unicité des décomposition dans la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$, cela permet de redémontrer la C.N.S. de somme directe, pour une somme de p sous-espaces vectoriels.

NOUVEAU Programme 2022

VI.2 Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.a) A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	*Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.*
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ *avec égalité si et seulement si la somme est directe.*	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	*Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.*
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée.	*Notation $\operatorname{tr}(A)$.*
Linéarité, trace d'une transposée.	
Relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.	
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	

ancien Programme PC :

Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace ;*
- *passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit et somme d'espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.	
Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.	*Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.*
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ *avec égalité si et seulement si la somme est directe.*	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	*Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.*
Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v.	
c) Déterminants	
Exemples de déterminants.	*Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.* *⇆ I : calcul du déterminant d'une matrice.*
d) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	*La notion de matrices équivalentes est hors programme.*

Contenus	Capacités & Commentaires
Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. *Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.*	