Ordre des exercices : 4, 5, 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 2, 5, 12 , 22, 23, 24, 21, 28, 25, 26

Méthodes à retenir :

- Pour justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, il suffit de vérifier que l'intersection est réduite au vecteur nul, et que la somme des dimensions est celle de l'espace vectoriel considéré, en dimension finie.
- La notion de stabilité d'un sous-espace vectoriel F par un endomorphisme est équivalente à la présence d'un bloc de zéros dans une base adaptée à une somme directe entre F et un supplémentaire.
- Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme, et la relation entre ces matrices est la formule de passage vue en PCSI.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆ *Matrice d'application linéaire dans* $\mathbb{R}_3[X]$

Déterminer la matrice dans la base canonique de φ : $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Exercice 2 ☆☆ *« Application transposée »*

Rappeler la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Ecrire dans cette base la matrice de l'application linéaire
$f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^T$, puis calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$.

Exercice 3

Soit p un projecteur de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $n-1 \geq r \geq 1$ le rang de p.

1. Justifier que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, et préciser, pour $\overrightarrow{x}$ vecteur de E la décomposition de $\overrightarrow{x}$ dans la somme directe précédente.
2. On note s la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p$ dans la direction de $\operatorname{Ker} p$. Justifier que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Exercice 4 ☆☆

Prouver qu'il existe une seule application linéaire v de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_1[X]$ telle que $\operatorname{Ker} v$ soit engendré par $(X-1)$ et $(X-2)$ et telle que $v(X^2) = X$. Quelle est sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$?

Exercice 5 ☆☆ *Trace et rang d'un projecteur*

Soit p un projecteur de E de dimension n, et $r = \mathrm{rg}(p)$.
En utilisant que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, à l'aide d'une base adaptée, démontrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 6 ☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice représentant l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $E = \mathbb{R}^4$.

1. $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est-il stable par f ?
2. $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_4)$ est-il stable par f ?
3. $H = \mathrm{Vect}(e_2, e_4)$ est-il stable par f ?

II. Exercices

Exercice 7 ☆

On note $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \{\lambda I_2;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des s.-e.v. de E.
2. A-t-on $F \oplus G = F + G$?
3. A-t-on $F \oplus G = E$?

Exercice 8 ☆☆

1. Donner la définition de deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E.
2. On considère maintenant l'espace vectoriel E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $F = \{f \in E | f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{g : x \mapsto ax + b; (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 9 ☆☆*Noyau, base image d'une application linéaire*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $f : E \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - XP'$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Justifier que $f(E) \subset E$, que peut-on en déduire sur f.
3. Justifier que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X) = \{a_1 X; a_1 \in \mathbb{R}\}$.
4. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 10 ☆☆☆ « *matrices symétriques et antisymétriques* »

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{A}_n = \left\{R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); R^T = -R\right\}$ et $\mathcal{S}_n = \left\{S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); S^T = S\right\}$.

1. Justifier que toute matrice $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire dans la somme $\mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$ sous la forme : $Q = R + S$, avec $R = \dfrac{1}{2}\left(Q - Q^T\right)$ et $S = \dfrac{1}{2}\left(Q + Q^T\right)$.
2. Justifier que la décomposition précédente est unique.
3. En déduire que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.
4. Justifier que la famille $\mathcal{B}_a = (E_{ij} - E_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$ est une base de $\mathcal{A}_n$.
5. Justifier que la famille $\mathcal{B}_s = ((E_{ii})_{1\leq i\leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$ est une base de $\mathcal{S}_n$.
6. En déduire une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.

Exercice 11 ☆☆☆

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Comparer pour l'inclusion les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^2)$ et $E_3 = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^3)$.
2. Déterminer une base de E_1.
3. En déduire un supplémentaire S_1 de E_1 dans E_2 et une base adaptée à la somme directe $E_2 = E_1 \oplus S_1$.
4. En déduire un supplémentaire S_2 de E_2 dans E_3 et une base adaptée à la somme directe $E_3 = E_2 \oplus S_2$.
5. Déterminer la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus S_1 \oplus E_2$.

Exercice 12 ☆☆☆

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. On suppose que $f + f^2 + f^3 = O_{\mathcal{L}(E)}$.

1. $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \mathrm{Im}(f)$ est stable par f.
3. Montrer que l'endomorphisme $g = f_{|F}^{|F}$ induit par f sur F est un automorphisme de F.

Exercice 13 ☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice p). Calculer $\det A$.

Exercice 14 ☆

Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} e & e^2 & & \dots & e^n \\ 0 & e^2 & e^3 & & \vdots \\ 0 & 0 & e^3 & \ddots & e^n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & e^n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & e^n \end{vmatrix}$;

Exercice 15 ☆☆

Soit A_{2n} la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ donnée par $A_{2n} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } j = 2n + 1 - i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où a et b sont deux réels.

Donner A_2 et A_4.On note $\Delta_{2n} = \det(A_{2n})$. Calculer Δ_2 et Δ_4.

Calculer Δ_{2n} dans le cas $a = 0$. Même question pour $a \neq 0$.

Exercice 16 ☆

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det\left(M^T\right) = \det(M)$.
2. On suppose que la matrice M est antisymétrique (i.e. $M^T = -M$) et non nulle.
   (a) Montrer que si n est impair alors M n'est pas inversible.
   (b) Montrer que si $n = 2$, alors M est inversible.
   (c) Si $n = 4$, peut-on affirmer que M est inversible ? qu'elle ne l'est pas ?

Exercice 17 ☆☆☆

Soient $a, b \in \mathbb{C}^\star$ distincts.

On pose $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + ab + b^2$, et pour $n \geq 3$,

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Calculer D_n en fonction de $n \geq 1$.

III. Exercices avancés

Exercice 18 ☆☆☆

Calculer sous forme factorisée l'expression de

$$P(x) = \det(xI_3 - M), \text{ où } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de x la matrice $xI_3 - M$ est-elle non inversible ?

Exercice 19 ☆☆

Soit E un$\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f) = 1$

1. En utilisant la colinéarité des vecteurs colonnes de $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Exprimer M^2 à l'aide de M et en déduire que $f^2 = tr(f)f$.
2. Quelle est la dimension de $H = \operatorname{Ker}(f)$? On note G un supplémentaire de H dans E, $\mathcal{C}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ et $N = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Exprimer N^2 à l'aide de N et en déduire que $f^2 = tr(f)f$.

5/2 trouver un polynôme annulateur de f.

5/2 en déduire qu'une C.N.S. de diagonalisabilité de f est $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.

Exercice 20 ☆☆☆ *« Matrices de transvection »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1, \ldots, C_n$ ses vecteurs colonnes, et $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes. Soient $(i,j) \in [\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{i,j}$.
1) Justifier que $T_{i,j,\lambda}$ est inversible.
2) A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à droite par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(MT_{i,j,\lambda})$ et $\det(M)$.
3)A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à gauche par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(T_{i,j,\lambda}M)$ et $\det(M)$.

Exercice 21 ☆☆☆☆

Soient n un entier, $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \neq 0$. En déduire que M est inversible. Calculer son inverse.
(on pourra le chercher sous la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & (*) \\ 0_n & B^{-1} \end{pmatrix}$)

Exercice 22 ☆☆ *Nilpotents*

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \geq 2$.

On suppose que la composée n fois $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on dit que u est nilpotent d'ordre n).

1. Justifier qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ de E tel que $u^{n-1}(\overrightarrow{x}) \neq \overrightarrow{0}$.
2. On fixe alors un tel vecteur $\overrightarrow{x}$. Justifier que la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \ldots, u^{n-1}(\overrightarrow{x}))$ est une famille libre de E.
3. En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 ☆☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto \operatorname{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. ;
2. Montrer que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice A telle que : $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \psi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$.

Exercice 24 ☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est à dire tel qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\operatorname{Id}_E - f$ est inversibles.
2. Même question pour $\operatorname{Id}_E + f$

Exercice 25 ☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u , v deux endomorphismes de E démontrer que
$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
(on comparera $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Im}(u+v)$, puis on pourra utiliser $u+v$ et $-v$, en remarquant que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(-u)$)

Exercice 26 ☆☆☆

Soient φ et ψ deux applications linéaires respectivement de E vers F et de F vers E telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$ et $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$;
démontrer que $F = \operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Ker} \psi$, et si E et F sont de dimension finie, comparer $\operatorname{rg} \varphi$ et $\operatorname{rg} \psi$

Exercice 27 ☆☆☆ *Mines-Ponts 2018*

u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v est nilpotent.

Montrer que $u + v$ est inversible ssi u est inversible.

Exercice 28 ☆☆☆☆

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

1. Montrer que A est inversible.
2. On suppose en outre que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} > 0$.
   Montrer que $\det(A) > 0$.
   on pourra étudier les annulations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x : \det(xI_n + A)$

Notes

[3] correction : $x = x - p(x) + p(x)$ donc $E \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$, et par un calcul $0 = p(y) = p \circ^p (x) = p(x) = y$ pour $y = p(x) \in \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Im}(p)$, donc $\operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Im}(p) = \{0_E\}$

[5] correction : on écrit les colonnes

[11] correction : Partant de M, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

arriver par noyaux emboités à $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ via changement de bases dans une base adaptée.

[16] correction : contre-exemples. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[17] correction : *développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient* $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ $r^2 - (a+b)r + ab = (r-a)(r-b)$ *d'où* $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

[18] correction :

$(x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2$

[22] correction :

[24] correction : $(\operatorname{Id}_E - f) \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} f^k = \operatorname{Id}_E - f^p = \operatorname{Id}_E$

$(\operatorname{Id}_E + f) \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^k = \operatorname{Id}_E - f^p = \operatorname{Id}_E + (-1)^{p-1} f^p = \operatorname{Id}_E$

[27] correction : 1. Si u inversible, pour $w = u^{-1}v$, on a $u + v = u(id + w)$, et comme $v^p = 0$, on a par commutation $w^p = 0$, donc $(id + w)$ inversible d'inverse $id - w + \cdots + (-1)^{p-1} w^{p-1}$.

réciproquement, $u = u + v + (-v)$ et $-v$ est nilpotent.

[28] correction : 1) Par l'absurde si les colonnes sont liées, doit (λ_i) non tous nuls tels que $\sum \lambda_j C_j = 0$, et $m = \max(|\lambda_i|) \neq 0$.

alors $\forall i$, $\displaystyle\sum_j \lambda_j a_{ij} = 0$, donc $|\lambda_i| \leq \dfrac{\sum_{j \neq i} |\lambda_j||a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leq m \dfrac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < m$ absurde d'après la définition de m.

2) $x \mapsto \det(xI_n + A)$ est polynomiale de monome dominant x^n, donc continue et de limite $+\infty$ en $+\infty$.

$xI_n + A$ vérifie encore la propriété de la question 1 donc ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}^+$, et par continuité elle n'y prend que des valeurs > 0, et en particulier $f(0) > 0$.