Table des matières

Pré-requis

Notion de suites numériques. Régularité d'une fonction de la variable réelle.

Objectifs

Donner un sens à la notion de convergence d'une suite de fonctions : point par point (convergence simple) ou uniforme (pour la norme infinie). Cadre théorique pour échanger $\lim n \to +\infty$ avec la dérivation, l'intégration.

On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, et on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Suites de fonctions

I.1 Convergence simple

Définition 1.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge simplement** sur I vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

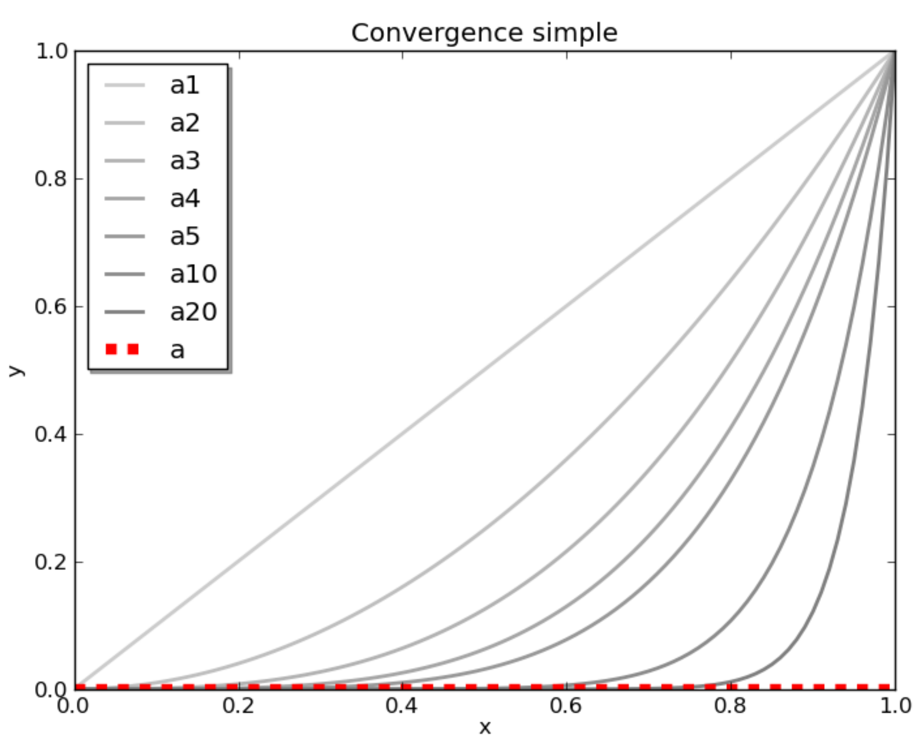
Remarque 1. En d'autres termes, (f_n) CVS sur I vers f si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ (\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence dépend du point x considéré !!!

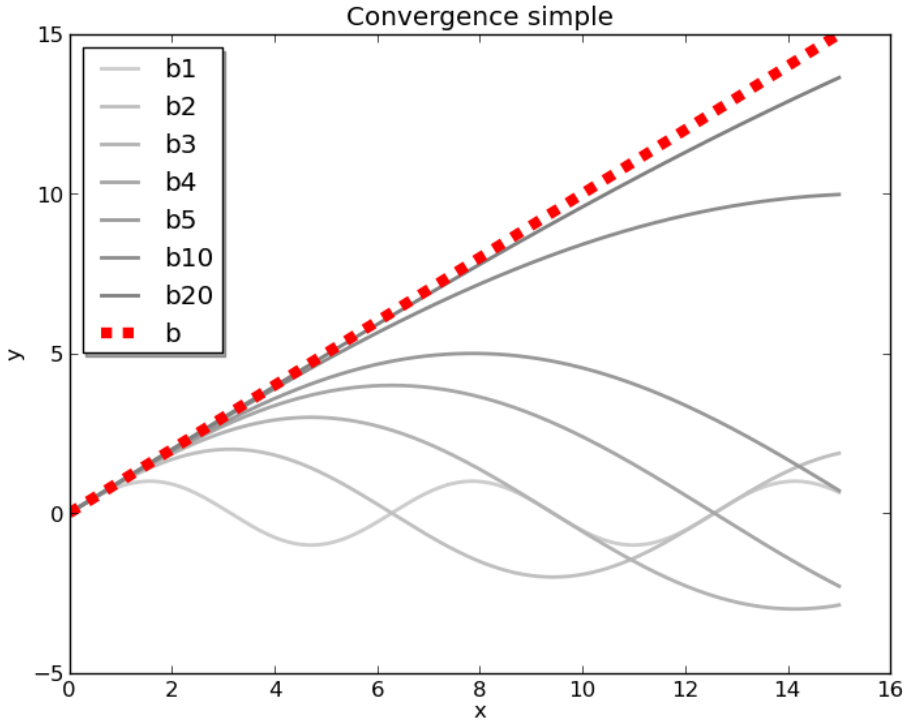
exemple 1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} a_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$

converge simplement sur $I=[0,1]$ vers la fonction $a : x \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x<1 \\ 1 \text{ si } x=1 \end{cases}$



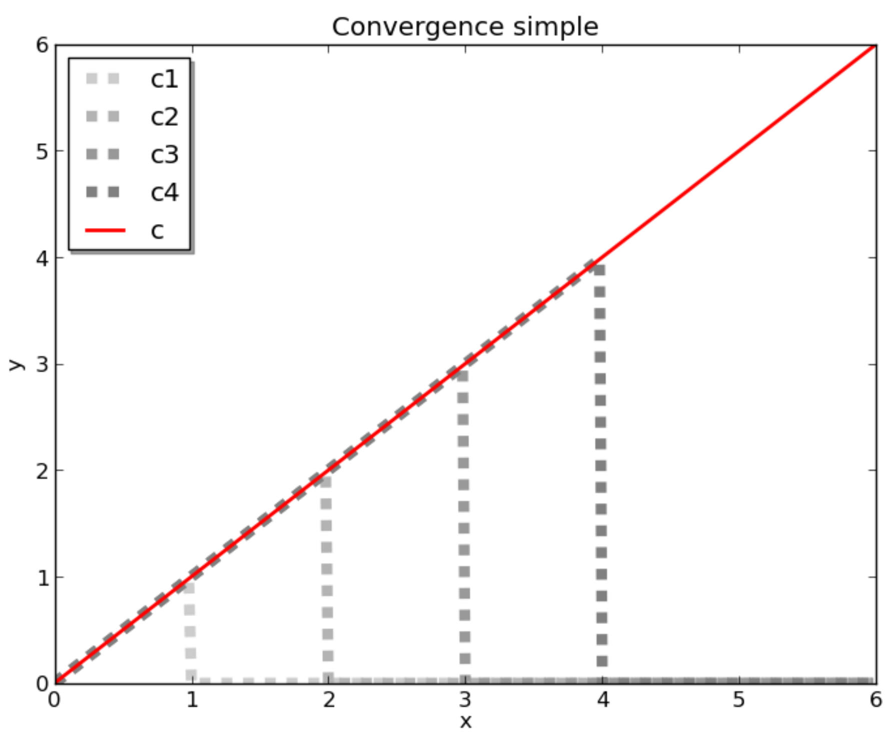
exemple 2. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} b_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \end{array}$

converge simplement sur $I=\mathbb{R}$ vers la fonction $b : x \longrightarrow x$.



exemple 3. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \end{array}$

converge simplement sur $I = \mathbb{R}$ vers la fonction $c : x \longrightarrow x$.



Remarque 2. Attention, les propriétés de continuité, dérivabilité, etc... ne sont pas nécessairement conservées pour une limite simple !

Mais les inégalités larges étant conservées lors de passages à la limite, la positivité, les majorations par une borne indépendante de n ou la convexité restent vraies.

I.2 Normes

2.a) Rappels de PCSI : normes

Définition 2.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** si :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

I.3 Convergence uniforme

Définition 3.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $f : I \to \mathbb{C}$) est bornée sur I s'il existe $K > 0$ tel que : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq K$.
Si tel est le cas, on note $\|f\|_{\infty,I} = \sup\{|f(t)|; t \in I\}$, valeur appelé normé infinie de F sur I.

Remarque 3. Rappel de PCSI : toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 4. $\| \ \|_{\infty,I}$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur I.

Définition 4.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions (bornées) de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge uniformément** sur I vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Remarque 5. En d'autres termes, (f_n) CVU sur I vers f si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}; (\forall n \geq n_1,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

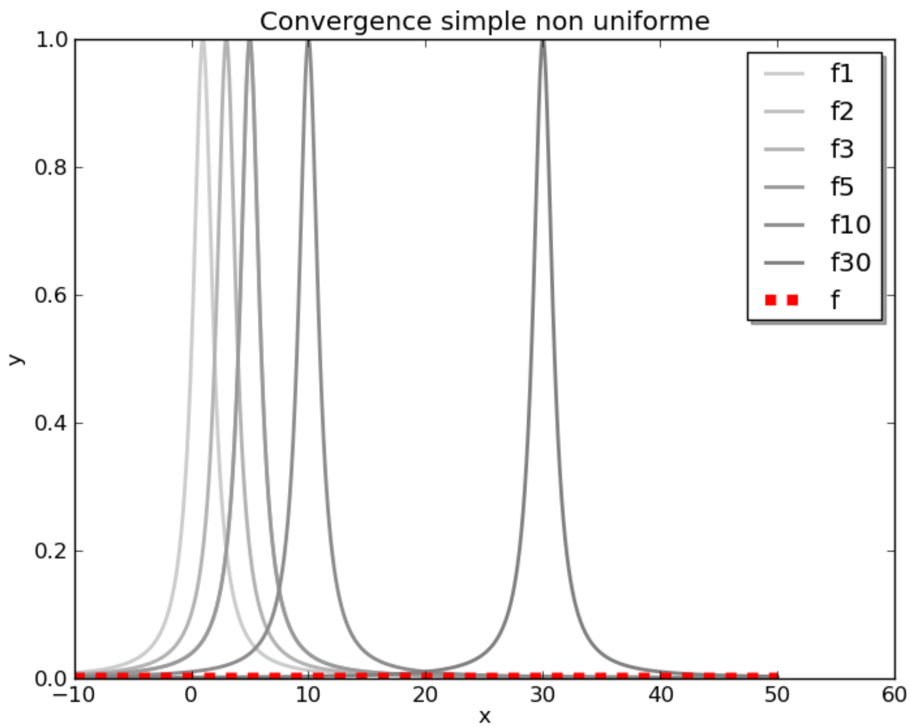
dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence ne dépend pas du point de I considéré !!!

Proposition 1.

Si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors (f_n) converge simplement sur I vers f.

démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, et $n_1(\varepsilon)$ associé, on pose, pour tout $x \in I$, $n_0 = n_0(x, \varepsilon) = n_1(\varepsilon)$, et on a bien :
$\forall x \in I,\ (\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$ $\square$

Remarque 6. ATTENTION : La réciproque est fausse : en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$, la suite (f_n) CVS sur $\mathbb{R}$, vers $f = \tilde{0}$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n - \tilde{0}\|_{\infty,\mathbb{R}} = |f_n(n) - 0| = 1$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$



I.4 Pratique : calculs de normes infinies

méthode 1 : on étudie les variations de f_n, pour n fixé. Attention aux signes ! On obtient la valeur de $\|f_n\|_{\infty,I}$.
méthode 2 : pour tout $t \in I$ fixé et $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on majore $|f_n(t)| \leq K$ et on trouve une valeur t_0 pour laquelle l'égalité $K = |f(t_0)|$ est réalisée.

I.5 Pratique : domination d'une suite

méthode : pour tout $t \in I$ fixé, on majore $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ indépendemment de $n \in \mathbb{N}$.

II. Propriétés de la limite d'une suite sur un segment

II.1 Continuité de la limite d'une suite de fonctions

exemple 4. La limite d'une suite de fonctions continues peut ne pas être continue.

Par exemple, la suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$

converge simplement sur $I=[0,1]$ vers $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x\in[0,1[\\ 1 \text{ si } x=1 \end{cases}$, qui n'est pas continue.

Proposition 2.

Soient I un intervalle réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, qui converge uniformément sur I vers $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est continue sur I.

démonstration : Soient $x_0\in I$, et $\varepsilon>0$. Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_0,\ \|f_n-f\|_{\infty,I}\leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

La fonction f_{n_0} étant continue en x_0, il existe un $\eta>0$ tel que $\forall x\in]x_0-\eta,x_0+\eta[\cap I,\ |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Mais alors pour un tel η et $x\in]x_0-\eta,x_0+\eta[\cap I$, on a :

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)+f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|$$
$$|f(x)-f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x)-f_{n_0}(x)|}_{\leq\varepsilon/3}+\underbrace{|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|}_{\leq\varepsilon/3}+\underbrace{|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|}_{\leq\varepsilon/3}$$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0;\ \forall x\in]x_0-\eta,x_0+\eta[\cap I,\ |f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$, donc f est continue en x_0, pour tout $x_0\in I$. □

Remarque 7. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de I, on obtient la continuité sur I.

II.2 Interversion limite-intégrale

2.a) En cas de convergence uniforme

Proposition 3.

Soient $I=[a,b]$ un segment, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers $f\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.
Alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

démonstration :

$$\left|\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f_n(t)-f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b \|f_n-f\|_{\infty,[a,b]}\ \mathrm{d}t$$

Donc $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\ \|f_n-f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Le theorème des gendarmes permet de conclure sur l'existence et la valeur de la limite. □

II.3 Dérivabilité

3.a) Suite de fonctions

Proposition 4.

Soient I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées converge uniformément sur I vers $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.

démonstration :
Dans le cas où I est un segment de $\mathbb{R}$, pour $x, a \in I$, on a :
$$f(x) - f(a) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) - f_n(a) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t.$$
On applique le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f_n') : elle converge uniformément vers h sur le segment, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais alors $f(x) - f(a) = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$, donc f est la primitive de h qui vaut $f(a)$ en a, donc est $\mathcal{C}^1$ et est telle que $f' = h$.

Dans le cas I intervalle quelconque, on procède comme précédeement sur tout segment J de I, et on obtient la classe $\mathcal{C}^1$ et la formule de dérivation sur tout segment J de I, donc sur I.

Remarque 8. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de I, le résultat reste vrai.

Proposition 5.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, telle que les suites $(f_n^{(i)})$ CVS sur I vers $h_i \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, et telle que la suite $(f_n^{(k)})$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $h_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f^{(i)} = h_i$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. □

III. Séries de fonctions

III.1 Convergence simple : définitions, exemples

Définition 5 (Sommes partielles).

Etant donnée une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $(S_N(\cdot))_{N\in\mathbb{N}}$ de ses fonctions **sommes partielles** par :
$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N : x \mapsto \sum_{k=0}^{N} u_k(x)$$

Définition 6 (Série de fonctions).

Etant donnée une suite de fonctions $(u_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, et $(S_N(\cdot))_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de ses fonctions sommes partielles, on appelle **série de fonctions** de **terme général** u_n le couple $((u_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}},(S_N(\cdot))_{N\in\mathbb{N}})$, que l'on note $\sum_{n\geq 0} u_n(\cdot)$ ou $\sum u_n$.

Définition 7.

Soit I un intervalle réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(I,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ **converge simplement** sur I (vers sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$) si :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \text{la suite} \left(\sum_{k=0}^{N} u_k(x)\right)_{N\geq 0} \text{converge}}$$

i.e. si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge (dans $\mathbb{K}$).

Si tel est le cas, on définit la **somme de la série de fonctions** $\sum_{n\geq 0} u_n(\cdot)$, que l'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\cdot)$ ou

$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$, par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \end{array}.$$

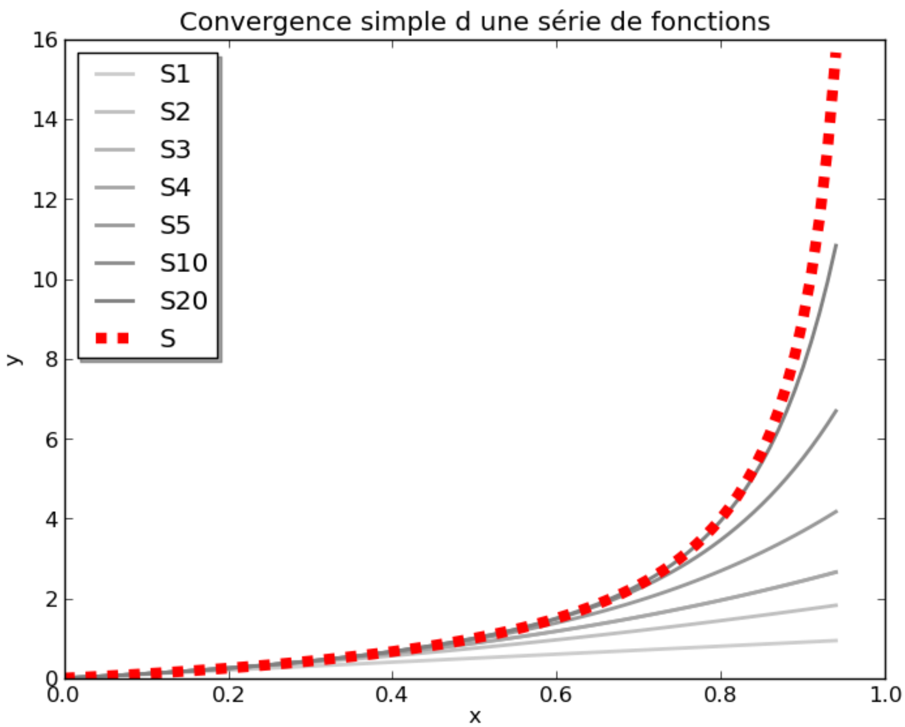
Remarque 9. En d'autres termes, la série de fonctions $\sum_n f_n$ CVS sur I vers S si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 = N_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall N \geq N_0,\ |\sum_{k=0}^{N} f_k(x) - S(x)| \leq \varepsilon\right)$$

dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence dépend du point x considéré !!!

exemple 5. La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ de fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$

converge simplement sur $I = [0,1[$ vers la fonction $S : x \longrightarrow \dfrac{x}{1-x}$



III.2 Convergence uniforme

Définition 8.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge uniformément** sur I vers sa sommme $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\sup_{t\in I}\left\{\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(t) - S(t)\right|\right\} = \|S_N - S\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Remarque 10. En d'autres termes, $\sum u_n$ CVU sur I vers S sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}; (\forall N \geq N_1,\ \forall x \in I,\ |S_N(x) - S(x)| \leq \varepsilon)$$

dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence ne dépend pas du point de I considéré !!!

Remarque 11. ATTENTION : La réciproque est fausse !!!

exemple 6. La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ de fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n : \begin{array}{rcl} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ converge simplement sur $I = [0,1[$ vers la fonction $S : x \longrightarrow \dfrac{x}{1-x}$, mais pas uniformément, car $\|S_N - S\|_{\infty,[0,1[} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^{N+1}}{1-x} = +\infty$

III.3 Convergence normale

Définition 9.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge normalement** sur I si la série numérique (positive) $\sum\limits_{n\geq 0} \|u_n\|_{\infty,I}$ converge.

exemple 7. Soient $\gamma \in [0,1[$, $J=[0,\gamma]$ et les fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} a_n : & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$

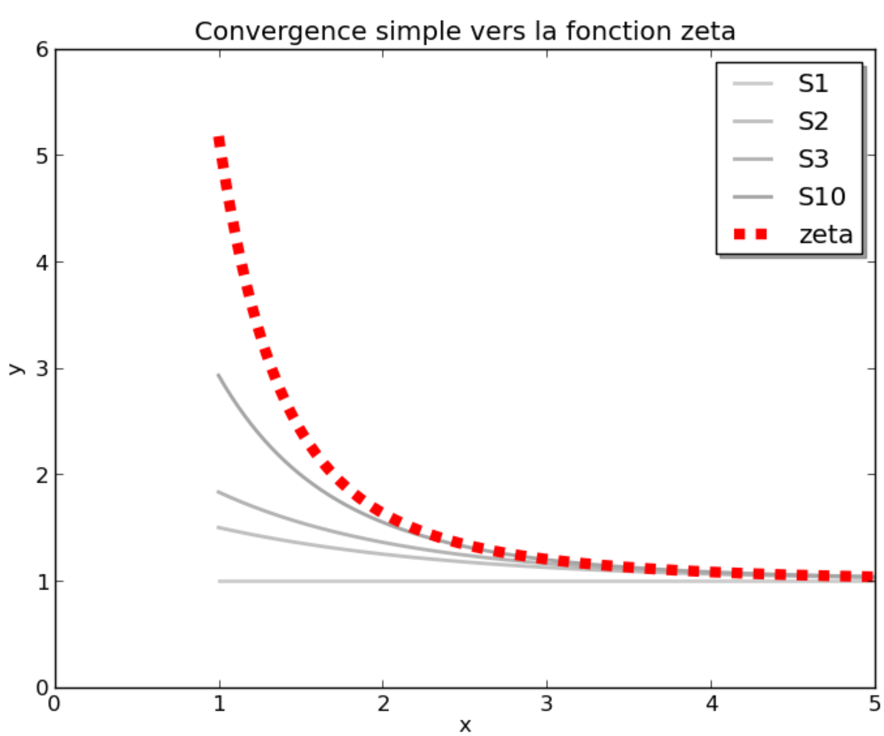
La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ de converge normalement sur J, car $\|a_n\|_{\infty,J} = \gamma^n$, donc la série géométrique $\sum \|a_n\|_{\infty,J}$ de raison $\gamma \in [0,1[$ converge.

exemple 8. La série $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ de fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} z_n : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^x} \end{array}$

converge simplement sur $I =]1,+\infty[$ vers la fonction $\zeta : x \longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

Pour tout $a > 1$, comme $\|z_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$, la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

Mais comme $\|z_n\|_{\infty,]1,+\infty[} = \dfrac{1}{n}$, la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ ne converge pas normalement sur $]1,+\infty[$.



Proposition 6.

Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément.
Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ converge normalement sur I, alors elle converge simplement.

démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=n_1+1}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty,I} \leq \varepsilon$. Alors pour tout $x \in I$, on a : $\forall n \geq n_1,\ |u_n(x)| \leq \|u_n\|_{\infty,I}$, donc par comparaison de séries positives, $\sum |u_n(x)|$ converge, donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit la convergence simple de $\sum u_n$ sur I et on note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

Pour tout $P \geq n_1+1$, on a $\left|\sum_{n=n_1}^{p} u_n(x)\right| \underset{\text{somme finie}}{\leq} \sum_{n=n_1}^{p} |u_n(x)| \leq \sum_{n=n_1}^{p} \|u_n\|_{\infty,I}$, et à la limite (tout étant convergeant), $R_{n_1} = \left|\sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leq \sum_{n=n_1}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty,I} = \varepsilon$

Mais alors, pour $N \geq n_1$, on a, pour tout $x \in I$, $|S_N(x) - S(x)| \leq \varepsilon$,

i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N};\ \forall N \geq n_1,\ \|S_N - S\|_{\infty,I} \leq \varepsilon$, d'où la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur I. $\square$

Remarque 12. Attention, la réciproque est fausse !

Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ de fonctions (f_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \end{array}$ converge simplement sur $I = [0,1[$ (par le CSSA, ou car ACV, par exemple)

Elle ne converge pas normalement sur $I = [0,1[$, car $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,I} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Elle converge uniformément, car $\|S_N - S\|_{\infty,[0,1[} \leq \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right| \xrightarrow[N\to+a]{} 0$

exemple 9. Attention, la réciproque est fausse !

Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ de fonctions (g_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ converge simplement sur $I = [0,1[$, mais ne converge pas uniformément.

Proposition 7.

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ un série de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ et $\sum \alpha_n$ une série numérique (positive) telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (\forall x\in I,\ |u_n(x)|\leq \alpha_n)$$

et telle que $\sum \alpha_n$ converge.

Alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur I.

démonstration : on utilise le théorème de comparaison de séries numériques positives : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq \|u_n\|_{\infty,I} = \sup\{|u_n(x)|,\ x\in I\}\leq \alpha_n$. $\square$

Remarque 13. En pratique, pour montrer la convergence normale de $\sum u_n$ sur I :

— ou bien, à n fixé, on sait majorer directement $|u_n(x)|$ indépendemment de $x\in I$, par le terme général α_n d'une série convergente.
exemple : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 0\leq \dfrac{1}{1+n^2+x^2}\leq \dfrac{1}{1+n^2}$.

— ou bien, à n fixé, on étudie les variations sur I de u_n, et on en déduit la valeur de $\|u_n\|_{\infty,I}$

IV. Propriétés de la somme d'une série de fonctions

IV.1 Continuité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 8.

Soient I un intervalle réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I vers $S\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est continue sur I.

démonstration : On applique le théorème de continuité vu pour une limite uniforme d'une suite de fonctions à la suite (S_N) des sommes partielles qui sont continues (sommes finies) et qui CVU vers S. $\square$

Remarque 14. La somme normalement convergente d'une séries de fonctions continues est continues, car pour une série de fonctions continues qui converge normalement sur I, il y a convergence uniforme.

Remarque 15. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de I, on obtient la continuité sur I.
exemple : $\zeta : x\mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1,+\infty[$, comme somme de fonctions continues qui CVU (car CVN) sur tout segment $[a,b]$ de $]1,+\infty[$.

exemple 10. La somme d'une série de fonctions continues peut ne pas être continue.

Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ de fonctions continues (u_n) définies par : $u_0 : x\mapsto 1$, et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{array}{rccl} u_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n - x^{n-1} \end{array}$$

converge simplement sur $I = [0,1]$, mais sa somme $S : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ n'est pas continue.

IV.2 Interversion limite-intégrale sur un segment

Théorème 9 (Intégration terme à terme sur un segment).

Soient $I = [a,b]$ un segment, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, telle que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.

Alors la série numérique $\sum \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\ \mathrm{d}t$$

démonstration :

On applique le résultat précédent à la suite $(S_N) = \left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)$ des sommes partielles.

IV.3 Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Théorème 10 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions).

Soient I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$, et telle que la série $\sum u_n'$ de ses dérivées converge uniformément sur I vers $T \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$.

démonstration : on applique aux sommes partielles (S_N) le résultat sur les suites de fonctions. □

Proposition 11.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ et que les séries $\sum u_n^{(i)}$ CVS sur I vers $S_i \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$, et telle que la série $\sum u_n^{(k)}$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $S_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S^{(i)} = S_i$, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. □

IV.4 double limite

Théorème 12 (Théorème de la double limite).

si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

La démonstration est hors programme.

exemple 11. La fonction $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ de Riemann tend vers 1 quandxtend vers l?infini, via la CVN donc CVU sur $[2, +\infty$.

NOUVEAU programme 2022-23

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors : $$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Régularité de la somme d'une série de fonctions	
Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et : $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$	La démonstration est hors programme.
Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

Programme PC :

B - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence d'une suite et d'une série de fonctions et de les exploiter pour étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n, $\Vert f_n\Vert_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Interversion limite-intégrale : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'=h$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$	
Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Suites et séries de fonctions intégrables	
Théorème de convergence dominée : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n \rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $$\int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\ \mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.
Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert \mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et $$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n \rvert$.