Ordre des exercices :

Méthodes à retenir :

- A l'aide du tableau de variations de f_n dérivable sur I, il est aisé de calculer la valeur de $\|f_n\|_{\infty,I} = \sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$.
- Pour démontrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction limite f, il suffit de montrer que $\|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Sur un segment $[a,b]$, le théorème d'interversion permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la suite de fonctions continue (f_n) CVU sur $[a,b]$.
- Sur un segment $[a,b]$, lorsque la suite de fonctions continues (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers f, on sait que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$.
- Pour démontrer qu'une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur un intervalle I vers une fonction somme S, il suffit de montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,I}$ converge. On a alors convergence normale donc convergence uniforme de la suite des fonctions sommes partielles vers la fonction somme.
- Sur un intervalle I, lorsque la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément (a fortiori si converge normalement), alors la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
- Sur un segment $[a,b]$, le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la série de fonction converge uniformément, a fortiori lorsqu'elle converge normalement sur $[a,b]$.
- Sur un intervalle quelconque I, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur I, et telle que la série $\sum u'_n$ des dérivées CVU sur I, on peut dériver terme à terme.

I. Convergence d'une suite de fonctions

Exercice 1 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x^n$.

1) Notons $J = [0,1[$. Montrer que (f_n) converge simplement vers f sur J.

2) (f_n) converge-t-elle simplement vers f sur $[0,1]$?

3) Montrer que la convergence est uniforme sur $K = [1/4, 1/2]$.

Exercice 2 ☆☆

Montrer que la suite (f_n) définie par $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{nx+1}{n+nx^2}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 3 ☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $t \mapsto \exp(t)$.

Exercice 4 ☆☆

Pour chaque suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, étudier la convergence simple sur I vers une éventuelle fonction limite :

a) $I =]-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto (n-1)x^n$;

b) $I = [0,\pi/2]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ g_n : x \mapsto (\cos x)^n$;

c) $I = [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+nx^2}$;

d) $I = [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ i_n : x \mapsto \dfrac{nx+1}{n^2+n^3x^2}$;

e) $I = [-1/2,1/2]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ j_n : x \mapsto \sum\limits_{k=n}^{n^2} x^k$.

Exercice 5 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de f_n.
2. En déduire que pour tout $a > 0$, f_n est bornée sur $[a,+\infty[$ et $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{e^{-na}}{a}$.
3. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $]0,+\infty[$.
4. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]0,+\infty[$.
5. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]1,+\infty[$.

II. Exercices

Exercice 6 ☆☆

Soit $a > 0$. Quel est l'ensemble de définition de $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (ax)^n$?

Exercice 7 ☆

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{x^2+n^2}$.

Exercice 8 ☆☆

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n^2}$. Après avoir étudié la convergence uniforme de $(f_n)_n$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$

Exercice 9 ☆☆

Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : t \longmapsto n\exp(-n-t)$.

1. La suite (g_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une limite g ?
2. La fonction g est-elle dérivable ?
3. Pour $n \geq 1$, g_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n'(t)$?

Exercice 10 ☆☆

Soit $I =]0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-nx}$.
Etudier la convergence simple puis la convergence normale sur I de la série de fonctions $\sum f_n$.
Même question en restriction à $J = [1/2, 1]$.

Exercice 11 ☆☆

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^2+x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 12 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de u_n.
2. En déduire que pour tout $a > 0$, u_n est bornée sur $[a,+\infty[$ et $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{e^{-na}}{a}$.
3. Quelle est la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-na}}{a}$?
4. Que peut-on en déduire pour la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$?
5. En déduire que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 13 ☆☆☆ *Interversion* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n :]-1,1[\to \mathbb{R},\ t \longmapsto t^n$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers $S : t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$.
   (c) Justifier que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.
2. En appliquant le théorème de dérivation terme à terme, en déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée en tout point.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.
4. En reprenant la méthode à l'ordre 2, calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$.

Exercice 14 ☆☆☆☆

On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x$ pour $x \in]0,1]$ et $u_n(0)=0$

1. Calculer, pour $x \in]0,1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. En déduire l'égalité $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$

Exercice 15 ☆☆

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où f_n est définie pour $x \in [0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{nx}{n^3+x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note S sa somme.
2) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_\infty$.
3) La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$? Normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^+$?
4) Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 16 ☆☆

Démontrer que $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^2}$ est et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

III. Fonction Dzeta

Exercice 17 ☆☆☆ **la fonction dzêta de Riemann**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$z_n : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}$ et $g_n : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$, et normalement sur tout $[a,+\infty[$, pour $a > 1$. On note $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ sa somme.
2. En déduire que ζ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]1,+\infty[$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} z_n'$ converge normalement sur tout $[a,+\infty[$, pour $a > 1$.
4. En déduire que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Exercice 18 ☆☆☆

On admet les résultats de l'exercice précédent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$g_n : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$, et normalement sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > 1$.

   On note $\tau :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ sa somme.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$\tau(x) = (2^{1-x} - 1)\ \zeta(x).$$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 19 ☆☆☆

Justifier que $f : t \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est 2π-périodique et impaire.

Exercice 20 ☆☆☆

1. Exprimer $\frac{1}{1+t}$ sous la forme de la somme d'une série numérique géométrique, pour $t \in [0, 1[$.
2. Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Exercice 21 ☆☆☆

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2. En remarquant que $S'(x)$ est du signe de $-1/x^2$, préciser le sens de variation de S.
3. Etablir
$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$
4. Donner un équivalent de S en 0.
5. En remarquant que
$$\frac{S(x) + S(x+1)}{2} \leq S(x) \leq \frac{S(x) + S(x-1)}{2}$$
donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 22 ☆☆☆☆ *Etude d'une somme de fonctions*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur
$$\mathcal{D} = [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$
On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et étudier le signe de $S'(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathcal{D}$.
3. Montrer que S admet une limite en 1.
4. Montrer que S tend vers 0 en $+\infty$.
5. Donner le tableau de variations de S, puis tracer l'allure de la courbe représentative de S.