Pré-requis

Objectifs

I. Polynômes d'endomorphisme

I.1 Définition, notations

Définition 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots a_d \in \mathbb{K}$. On appelle polynôme d'ndomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$, où $u^k = \mathrm{Id}$ si $k = 0$ et $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ si ≥ 1

Remarque 1. Idem avec matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

exemple 1. $X^0(u) = u^0 = \mathrm{Id}_E$
$X(u) = u$
$X^2(u) = u \circ u$

exemple 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^2 = 2A - I_2$

I.2 Polynômes annulateurs

2.a) Définition

Définition 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots a_d \in \mathbb{K}$.

On dit que P est annulateur de u si : P EST NON NUL et $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = O_{\mathcal{L}(E)}$

Définition 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots a_d \in \mathbb{K}$.

On dit que P est annulateur de A si : P EST NON NUL et $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = O_n$

exemple 3. $X^0(A) = A^0 = \mathrm{I}_n$
$X(A) = A$
$X^2(A) = A \times A$

exemple 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P = (X-1)^2$ annulateur de A car $A^2 = 2A - I_2$

2.b) Produits de polynômes

Proposition 1.

$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u),\ \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall u \in \mathcal{L}(E)$
$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)\ \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2.c) Calcul d'inverse

Proposition 2.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots a_d \in \mathbb{K}$, tel que $a_0 \neq 0$.

Si P est annulateur de u, alors u est inversible, d'inverse $u^{-1} = \dfrac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k u^{k-1}$

dém : $u \circ \left(\dfrac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k u^{k-1} \right) = -\mathrm{Id}_E$

exemple 5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (X-1)(X-3)$ annulateur de M, c'et à dire

$M^2 - 4M + 3I_2 = 0$, donc $\dfrac{-1}{3} M(M - 4I_2) = I$, et $M^{-1} = \dfrac{-1}{3}(M - 4I_2) = \dfrac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

2.d) Cas matriciel

Proposition 3.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots a_d \in \mathbb{K}$, tel que $a_0 \neq 0$.

Si P est annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}$

2.e) Puissances

Remarque 2. On peut aussi calculer les puissance : si R_p est le reste de X^p dans la division euclidienne $X^p = PQ_p + R_p$ de X^p par P annulateur, alors

$A^p = P(A)Q_p(A) + R_p(A) = R_p(A)$

Et si P scindé à racines simples $\lambda_1, \dots \lambda_n$, alors $R_p(\lambda_i) = \lambda_i^p$ permet de trouver R_p explicitement.

lemme 4. *$S = PQ + R$ avec P annulateur, alors $S(A) = R(A)$, en particulier $A^p = R_p(A)$ pour R_p le polynôme de reste dans la division euclidienne de X^p par P annulateur.*

On trouve les coeff de R_p en évaluant en les racines simples de P, voire en dérivant puis évaluant pour les racines multiples.

Exemple $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcul de J^p.

II. Interpolation de Lagrange

II.1 Définition

Définition 4.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Les polynômes de Lagrange sont les $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ définis par :

$$L_i = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{1}{(a_i - a_j)}(X - a_j)$$

II.2 Propriétés

Proposition 5.

$L_i(a_j) = \delta_i^j$

dém : par construction !

Proposition 6.

(L_i) base de $\mathbb{K}_n[X]$

dém : Liberté : si $\sum \lambda_i L_i = O$, alors en a_j, $\lambda_j \times 1 = 0$. Puis par cardinal égale dimension , on obtient une base.

Proposition 7.

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

dém : Liberté : si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = P$, alors en a_j, $\lambda_j \times 1 = P(a_j)$; la décomposition est unique dans une base.

Corollaire 8.

$\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$.

dém :

II.3 Interpolation de Lagrange

Pour approcher une fonction continue f, sur un intervalle, on peut prendre le polynôme interpolant les $f(x_i)$ en les a_i.

II.4 Vandermonde

Définition 5.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **déterminant de Vandermonde** le scalaire noté $V(a_1, \dots, a_n)$ défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

lemme 9. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\quad V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n)$

démonstration :

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

On fait successivement et dans cet ordre, pour k allant en décroissant de $n+1$ à 2, on fait $C_k \leftarrow C_k - a_{n+1} C_{k-1}$:

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & (a_1 - a_{n+1}) & a_1(a_1 - a_{n+1}) & \dots & a_1^{n-2}(a_1 - a_{n+1}) & a_1^{n-1}(a_1 - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & (a_{n-1} - a_{n+1}) & a_{n-1}(a_{n-1} - a_{n+1}) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_{n+1}) & a_{n-1}^{n-1}(a_{n-1} - a_{n+1}) \\ 1 & (a_n - a_{n+1}) & a_n(a_n - a_{n+1}) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_{n+1}) & a_n^{n-1}(a_n - a_{n+1}) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2}(a_1 - a_{n+1}) \times \dots \times (a_n - a_{n+1}) \times V(a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n)$$

en développant par rapport à la première ligne puis en factorisant en ligne. □

Proposition 10 (déterminant de Vandermonde).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $\boxed{V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$.

démonstration : par récurrence sur $n \geq 1$.

- L'initialisation est immédiate pour $n = 1$.
- supposons la propriété vraie au rang n.

On a :

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right) \times \prod_{j=1}^{n} (a_{n+1} - a_j) = \prod_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right)$$

Proposition 11.

$V_{n+1}(a_0, \dots a_n) \neq 0$ assure que le système $MX = Y$ admet une unique solution où $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $M = (a_i^j)_{i,j}$ la matrice de Vandermonde, et $X = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, avec $P = \sum c_k X^k$ l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange.

Remarque 3. Lien avec la recherche de R_p dans les divisions euclidiennes :

$$M \times \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots P(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_n \end{pmatrix} \text{ pour } P = \prod_{i=1}^{d} (X - x_i) \text{ scindé à racines simples.}$$

NOUVEAU Programme 2022

II.5 Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.a) A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	*Relation* $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Polynôme annulateur.	*Application au calcul de l'inverse et des puissances.*
Deux polynômes de l'endomorphisme u *commutent.*	*Le noyau de* $P(u)$ *est stable par* u.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ *constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en* $n+1$ *points distincts de* $\mathbb{K}$.	*Expression d'un polynôme* $P \in \mathbb{K}_n[X]$ *dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en* $n+1$ *points est le polynôme constant égal à 1.*
Déterminant de Vandermonde.	*Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.*

ancien Programme PC :

Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

— consolider les acquis de la classe de première année ;

— étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace ;

— passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit et somme d'espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.	
Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.	*Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.*
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	*Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.*
Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v.	
c) Déterminants	
Exemples de déterminants.	*Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.* *$\leftrightarrows$ I : calcul du déterminant d'une matrice.*

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables. *Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.* *Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.*	*La notion de matrices équivalentes est hors programme.*