Ordre des exercices : 2, 1, 5 ; 11, 15 ; 8,7 ; 10, 11, 16

Méthodes à retenir :

- Utiliser un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'une matrice ou son inverse si elle est inversible

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Trouver un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, après avoir calculé $(M - I_3)(M - 2I_2)(M - 3I_3)$.

Exercice 2 ☆

Trouver l'inverse de A inversible telle que $A^3 + I_n = 0_n$

Exercice 3 ☆

Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 2 & & & 2^{n-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & n & & & n^{n-1} \end{vmatrix}$;

II. Exercices

Exercice 4 ☆

Trouver un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, après avoir calculé $(M - I_3)$, $(M - I_3)^2$, $M(M - I_3)^2$.

Exercice 5 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On admet la relation $A^2 + A - 2I_3 = 0$. Montrer que A est inversible, et donner A^{-1}.

Exercice 6 ☆☆

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1.

1. Calculer J^2.
2. En déduire un polynôme Q annulateur de J.
3. En déduire la valeur de J^k pour tout $k \geq 2$, en fonction de I_n, J et k.

Exercice 7 ✰✰ *polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soient $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, et $b_0 = 1$, $b_1 = \pi$, $b_2 = \pi^2$.

Posons pour j$\in [\![0, 2]\!]$, $L_j = \displaystyle\prod_{0\leq i\leq 2, i\neq j} \frac{1}{a_j - a_i}(X - a_i)$

1. Vérifier que $L_p(a_q) = \delta_p^q$, pour tout $p, q \in [\![0, 2]\!]$
2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (L_0, L_1, L_2)$ est libre.
3. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Donner la décompostion de $S = 1 + X$ dans cette base.
5. S est-il l'unique polynôme de degré au plus 2 valant 1 en 0, 3 en 2 et 9 en 8 ? Même question parmi les polynômes de degré au plus 3.

Exercice 8

Donner un polynôme réel P de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$. Est-il unique ?

Exercice 9 ✰

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice p). Calculer $\det A$.

III. Exercices avancés

Exercice 10 ✰✰✰

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts.

On définit $V_n(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et le vecteur $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$.

1) Exprimer le produit $V(x_0, \ldots, x_n).A$ à l'aide du polynôme P.

2) A l'aide d'un développement selon une ligne, justifier que $f : z \longmapsto V(x_0, \ldots, x_{n-1}, z)$ est polynomiale de degré $n - 1$ et de coefficient dominant $V_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

3) En déduire que $\det(V_n(x_0, \ldots, x_n)) = \det(V_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})) \times \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)$, puis donner l'expression factorisée de $\det(V_n(x_0, \ldots, x_n))$.

4) Soit $(r_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(r_k) \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la question 1, que P est dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 ✰✰✰

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow x_j \neq x_j$.

Montrer que l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},\ P \longmapsto (P(x_0), \ldots, P(x_n)))$ est un isomorphisme.

Exercice 12 ✰

Démontrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme non nul.

Exercice 13 ✰✰

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer $(M - I_3)^3$ et en déduire le calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 ✰✰✰

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P = X^2 + 3X + 1$.

1. Justifier que $F = P\,\mathbb{R}[X]$ (ensemble des multiples de P) est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme Q associe son reste dans la division euclidienne par P.
   (a) Rappeler le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que f est une application linéaire.
   (c) Déterminer l'image et le noyau de f.
3. Soit $G = \mathbb{R}_1[X]$. Justifier que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E.

Exercice 15 ✰✰✰

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2 et N^3 et en déduire un polynôme annulateur de N.
Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer N^k en fonction de k, en explicitant ses coefficients.

Exercice 16 ✰✰

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2.
2. Montrer que le polynôme $X^2 - X - 2$ est annulateur de J.
3. En déduire que J est inversible, calculer J^{-1}.
4. Pour a, b complexes et $M = aJ + bI_3$, calculer M^n (on pourra étudier le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$).

Exercice 17 ✰✰✰

On note $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Démontrer qu'il existe un polynôme unitaire P_0 tel que $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \{QP_0;\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$

Notes

[3] correction :

[6] correction : $J^2 = nJ$, $Q = X^2 - nX$ $X^k = B_k Q + R_k$, donc $J^k = a_k I_n + b_k J$ avec en évaluant en 0 $0 = 0^k + a_k$ et en évaluant en $1/n$, $1/n^k = b_k/n$, d'où $J^k = \frac{1}{n^{k-1}} J$