Table des matières

I. Fonctions intégrables **2**
I.1 Définition . . . 2
I.2 Lien avec la convergence . . . 2

II. Espace des fonctions intégrables **3**
II.1 Notations . . . 3
II.2 Théorèmes de comparaison . . . 3
II.3 C.S. de nullité via une intégrale . . . 4

III. Intégration de la limite d'une suite ou série de fonctions sur un intervalle quelconque **4**
III.1 Convergence dominée . . . 4
III.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque . . . 7

Pré-requis

Intégrales généralisées : nature

Objectifs

Donner du sens aux intégrales du cours de physique ou chimie ayant des bornes infinies ou des bornes ouvertes. Servira à étudier la nature de certaines séries numériques. On généralise les propriétés de l'intégrales sur un segment aux fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I. Fonctions intégrables

I.1 Définition

Définition 1 (Intégrale absolument convergente).

Soient I un intervalle (borné ou non) de bornes α et β, $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale de f sur I est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f|$ converge.

Définition 2 (intégrabilité sur un intervalle).

Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I est dite **intégrable** sur I si l'intégrale de f sur I est **absolument convergente**.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ la valeur de cette intégrale généralisée convergente.

Définition 3 (intégrabilité en une borne).

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a, \beta[$ est dite **intégrable** en β si $\displaystyle\int_a^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque 1. La réciproque est fausse : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est convergente, et non absolument convergente (c.f; TD : suites adjacentes, ou IPP).

Remarque 2. Pour une fonction à valeurs réelles positives, l'intégrabilité sur I est équivalent à la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$.

I.2 Lien avec la convergence

Proposition 1 (Convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction intégrable).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f|$ converge, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ converge.
i.e. : toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

démonstration : cas $I = [\alpha, \beta[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $f = f^+ - f^-$, où $f^+ : t \mapsto \max(f(t), 0)$ et $f^- : t \mapsto \max(-f(t), 0)$. On a pour tout t : $0 \leq f^+(t) \leq |f(t)|$ et $0 \leq f^-(t) \leq |f(t)|$, donc par comparaison, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f^+$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f^-$ convergent, car les $\displaystyle\int_{\alpha}^{y}$ sont majorées par les $\displaystyle\int_{\alpha}^{y}|f(t)|$ donc par $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}|f|$. Par linéarité de l'intégrale (sur les segments puis passage à la limite aux bornes impropres), $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(f^{+}-f^{-})$ converge. $\square$

Proposition 2 (Inégalité triangulaire).

Soit I un intervalle, f et g deux fonctions intégrables sur I sont absolument convergentes.
Alors c'est aussi le cas pour $f+g$ et $\displaystyle\int_I |f+g| \leq \int_I |f| + \int_I |g|$

II. Espace des fonctions intégrables

II.1 Notations

Définition 4 (fonction intégrable).

On note $L^1(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K});\ \displaystyle\int_I |f| \text{ converge} \right\}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.

Proposition 3.

$(L^1(I,\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

II.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 4 (de comparaison).

Soient $I=[\alpha,\beta[$ un intervalle réel avec $\beta=\sup(I)$, $f,g\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t\to\beta}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable en β.
2. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t\to\beta}{=} o(g(t))$, alors f est intégrable en β.
3. Si $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$, f est intégrable en β si et seulement si g est intégrable en β.

démonstration : 1) On utilise le critère d'intégrabilité pour des fonctions positives.
Il existe t_0 et $K>0$ tels que : $\forall t\geq t_0, |f(t)|\leq K|g(t)|$. 2) corollaire 3) On se ramène au cas précédent en majorant $|f(t)|$ par $2K|g(t)|$, pour tout t dans l'intervalle $[t_0,\beta[$

Remarque 3. On dispose des mêmes propriétés au voisinage de $\alpha=\inf(I)$ dans le cas où $I=]\alpha,\beta]$.

exemple 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, car $f: x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $f(x) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable en $+\infty$ et $f(x) \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable en $-\infty$, par comp. avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

II.3 C.S. de nullité via une intégrale

Proposition 5 (nullité d'une fonction continue positive et d'intégrale nulle)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est **continue**, **intégrable**, **positive** et vérifie $\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.

en particulier : $\left(f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0 \right) \Rightarrow \forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$

démonstration : sur un segment pour une fonction positive : vu en PCSI sur les segment, corollaire.

III. Intégration de la limite d'une suite ou série de fonctions sur un intervalle quelconque

III.1 Convergence dominée

Théorème 6 (de convergence dominée, admis)**.**

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

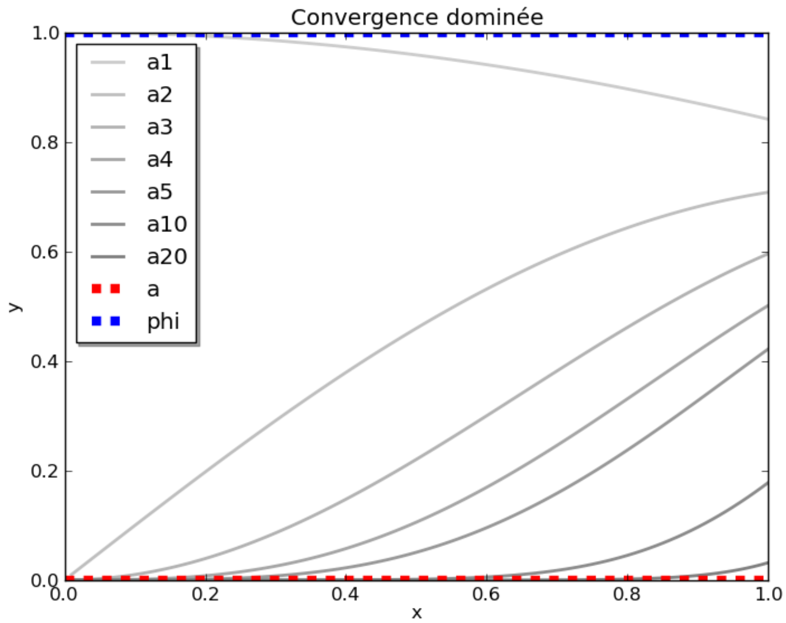
ii) la suite (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$. (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n}$.

exemple 2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccl} a_n : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin^n t}{n} \end{array}$

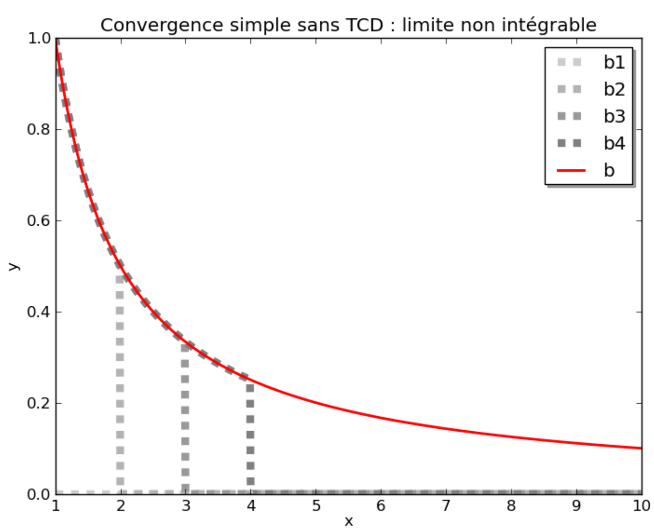
converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $a : x \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$



exemple 3. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{rccl} b_n : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \leq n \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $b : t \longrightarrow \dfrac{1}{t}$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction inférieure à $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable : le TCD ne s'applique pas, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} b_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$



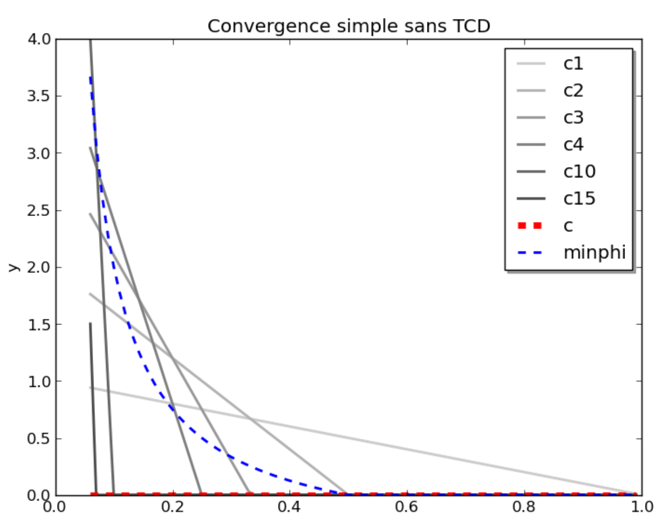
exemple 4. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{rccl} c_n : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} n(1-nx) \text{ si } x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x > \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $c : t \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction intégrable φ, car on aurait : $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |c_n(t)|$, en particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\varphi(1/(2n)) = n/2$, pour tout t tel que $E(1/t) = n$ on a :
$n \leq \dfrac{1}{t} \leq n+1$, et $\dfrac{1}{(n+1)} \leq t \leq \dfrac{1}{n}$.

Donc $f_n(t/2) \geq f_n(1/(2(n+1))) = n(1 - n/(2(n+1))) = n\dfrac{n+2}{2n+1} \geq \dfrac{n}{2} \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - 1\right)$

On obtient $\varphi(t/2) = \varphi_{\Big|\left[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{(n)}\right]}(t/2) \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-1\right)$, donc $\varphi(t) \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2t}-1\right)$ donc φ n'est pas intégrable : le TCD ne s'applique pas, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 c_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $0 = \displaystyle\int_0^1 c(t)\ \mathrm{d}t$.



III.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque

Théorème 7 (d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque)**.**

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** et **intégrable** sur I ;

ii) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ **converge simplement** sur I vers une fonction S **continue par morceaux sur** I ;

iii) la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge. (hypothèse de domination)

Alors la somme S de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ $\boxed{\text{est intégrable sur } I}$, la série $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} \int_I f_n \text{ converge}}$,

et $\boxed{\int_I \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$.

démonstration : admis idée on applique le TCD à la suite des sommes partielles.

Nouveau programme 2022-23

Intégration sur un intervalle quelconque (suite)

Contenus	Capacités & commentaires
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a, b[$, (respectivement $]a, b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
— si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. — si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
Fonctions de référence : *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, — *intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de* $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ *en* $+\infty$, *en* 0^+ ; — *étude de l'intégrabilité de* $t \mapsto e^{-\alpha t}$ *en* $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

Contenus	Capacités & commentaires

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

Programme PC avant :

Intégration

L'objectif de ce chapitre est multiple :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
- *compléter le chapitre dédié aux suites et aux séries de fonctions par le théorème de la convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$	
Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.	Intégrale divergente.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t$.	Les étudiants doivent connaître la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ selon le signe de α.

Contenus	Capacités & Commentaires
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Changement de variable : si $\varphi : \,]\alpha,\beta[\, \to \,]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).	Pour une fonction à valeurs réelles, on utilise ses parties positive et négative.
Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_I f$.
Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: — si $\lvert f\rvert \leqslant \lvert g\rvert$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. — si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
Si f est continue et intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I \lvert f(t)\rvert\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I.	Produit scalaire de deux fonctions continues de carré intégrable sur I à valeurs réelles.
Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwarz.	