Table des matières

Pré-requis

Intégrales généralisées : nature

Objectifs

Donner du sens aux intégrales du cours de physique ou chimie ayant des bornes infinies ou des bornes ouvertes. Servira à étudier la nature de certaines séries numériques. On généralise les propriétés de l'intégrales sur un segment aux fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I. Fonctions intégrables

I.1 Définition

Définition 1 (Intégrale absolument convergente).

Soient I un intervalle (borné ou non) de bornes α et β, $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale de f sur I est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f|$ converge.

Remarque 1. La réciproque est fausse : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ est convergente, et non absolument convergente (c.f; TD : suites adjacentes, ou IPP).

Définition 2 (intégrabilité sur un intervalle).

Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I est dite **intégrable** sur I si l'intégrale de f sur I est **absolument convergente**.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\, \mathrm{d}t$ la valeur de cette intégrale généralisée convergente.

Définition 3 (intégrabilité en une borne).

Soient I un intervalle réell et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ une borne ouverte de I. Une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est dite **intégrable** en β s'il existe $a \in I$ tel que $\displaystyle\int_a^\beta |f(t)|\, \mathrm{d}t$ converge.

Remarque 2. Pour une fonction à valeurs réelles positives, l'intégrabilité sur I est équivalent à la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$.

I.2 Lien avec la convergence

Proposition 1 (Convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction intégrable).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f|$ converge, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ converge.
i.e. : toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

démonstration : cas $I = [\alpha, \beta[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $f = f^+ - f^-$, où $f^+ : t \mapsto \max(f(t), 0)$ et $f^- : t \mapsto \max(-f(t), 0)$. On a pour tout t : $0 \leq f^+(t) \leq |f(t)|$ et $0 \leq f^-(t) \leq |f(t)|$, donc par comparaison, $\int_\alpha^\beta f^+$ et $\int_\alpha^\beta f^-$ convergent, car les $\int_\alpha^y$ sont majorées par les $\int_\alpha^y |f(t)|$ donc par $\int_\alpha^\beta |f|$. Par linéarité de l'intégrale (sur les segments puis passage à la limite aux bornes impropres), $\int_\alpha^\beta (f^+ - f^-)$ converge. □

Proposition 2 (Inégalité triangulaire).

Soit I un intervalle, f et g deux fonctions intégrables sur I sont absolument convergentes.
Alors c'est aussi le cas pour $f + g$ et $\int_I |f+g| \leq \int_I |f| + \int_I |g|$

dém : on a même pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, f, g intégrables sur I, par inégalité triangulaire $|\lambda f + \mu g| \leq |\lambda||f\ vert + |\mu||g|$ et par la CNS de convergence des intégrales généralisées de fonctions positives, $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |\lambda f(t) + \mu g(t)| \mathrm{d}t$ converge, car majorée par la constante $|\lambda| \int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)| \mathrm{d}t + |\mu| \int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |g(t)| \mathrm{d}t$. □

II. Espace des fonctions intégrables

II.1 Notations

Définition 4 (fonction intégrable).

On note $L^1(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K});\ \int_I |f| \text{ converge} \right\}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.

Proposition 3.

$(L^1(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

dém : cf calcul précédent et le fait que la fonction nulle est cpm intégrable. □

II.2 Fonctions de référence

$t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$
$t \mapsto \mathrm{e}^{-\beta t}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\beta > 0$.
$t \mapsto t^{-\gamma}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\gamma > 1$.
$t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en 0 ssi $\alpha < 1$.
$t \mapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha < 1$.

II.3 Théorèmes de comparaison

Théorème 4 (de comparaison).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t\to\beta}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable en β.
2. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t\to\beta}{=} o(g(t))$, alors f est intégrable en β.
3. Si $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$, f est intégrable en β si et seulement si g est intégrable en β.

démonstration : 1) On utilise le critère d'intégrabilité pour des fonctions positives.

Il existe t_0 et $K > 0$ tels que : $\forall t \geq t_0, |f(t)| \leq K|g(t)|$. 2) corollaire 3) On se ramène au cas précédent en majorant $|f(t)|$ par $2K|g(t)|$, pour tout t dans l'intervalle $[t_0, \beta[$

Remarque 3. On dispose des mêmes propriétés au voisinage de $\alpha = \inf(I)$ dans le cas où $I =]\alpha, \beta]$.

exemple 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $f(x) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable en $+\infty$ et $f(x) \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable en $-\infty$, par comp. avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

III. Intégration de la limite d'une suite ou série de fonctions sur un intervalle quelconque

III.1 Convergence dominée

Théorème 5 (de convergence dominée, admis).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

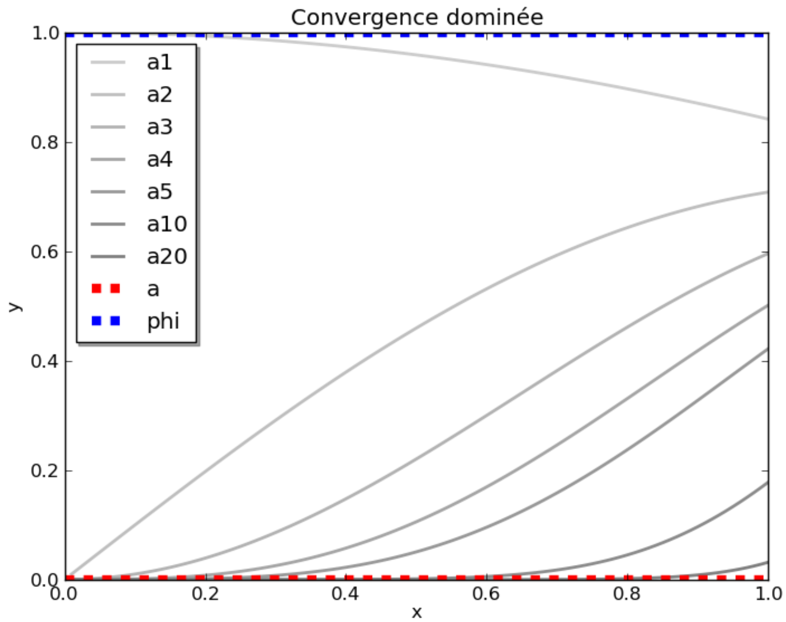
ii) la suite (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$. (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n,\text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n}$.

exemple 2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} a_n : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin^n t}{n} \end{array}$

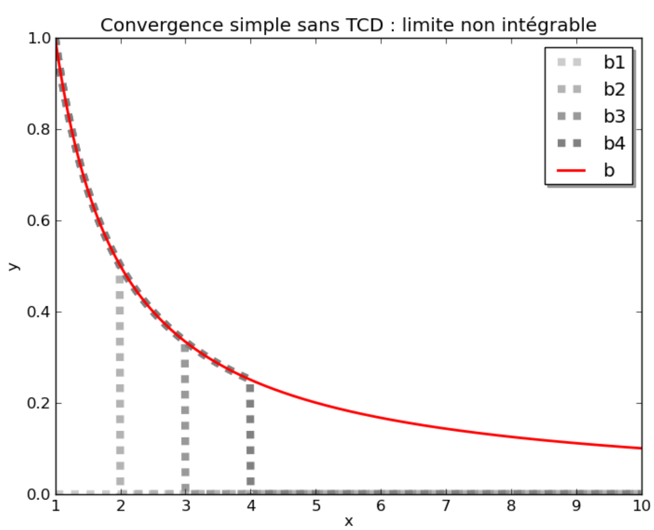
converge simplement sur $I =]0, 1]$ vers la fonction $a : x \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$



exemple 3. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{rccl} b_n: &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \leq n \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $b : t \longrightarrow \dfrac{1}{t}$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction inférieure à $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable : le TCD ne s'applique pas, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} b_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$



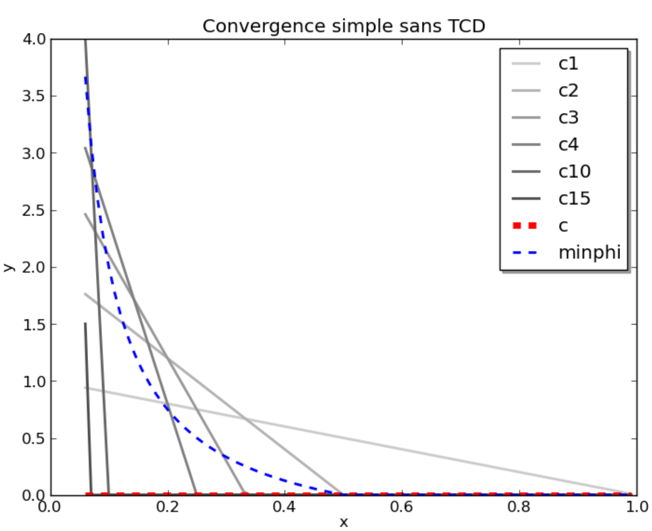
exemple 4. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{rccl} c_n: &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} n(1-nx) \text{ si } x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x > \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $c : t \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction intégrable φ, car on aurait : $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |c_n(t)|$, en particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\varphi(1/(2n)) = n/2$, pour tout t tel que $E(1/t) = n$ on a :
$n \leq \dfrac{1}{t} \leq n+1$, et $\dfrac{1}{(n+1)} \leq t \leq \dfrac{1}{n}$.

Donc $f_n(t/2) \geq f_n(1/(2(n+1))) = n(1 - n/(2(n+1))) = n\dfrac{n+2}{2n+1} \geq \dfrac{n}{2} \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - 1\right)$

On obtient $\varphi(t/2) = \varphi\Big|_{\left[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{(n)}\right]}(t/2) \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - 1\right)$, donc $\varphi(t) \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2t} - 1\right)$ donc φ n'est pas intégrable : le TCD ne s'applique pas, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 c_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $0 = \displaystyle\int_0^1 c(t)\ \mathrm{d}t$.



III.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque

Théorème 6 (d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque)**.**

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** et **intégrable** sur I ;

ii) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ **converge simplement** sur I vers une fonction S **continue par morceaux sur** I ;

iii) la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge. (hypothèse de domination)

Alors la somme S de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ $\boxed{\text{est intégrable sur } I}$, la série $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} \int_I f_n \text{ converge}}$,

et $\boxed{\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$.

démonstration : admis idée on applique le TCD à la suite des sommes partielles.

IV. Espaces vectoriels normés de fonctions

IV.1 C.S. de nullité via une intégrale

Proposition 7 (nullité d'une fonction continue positive et d'intégrale nulle)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est **continue**, **intégrable**, **positive** et vérifie $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.

en particulier : $\left(f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0 \right) \Rightarrow \forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$

démonstration : sur un segment pour une fonction positive : vu en PCSI sur les segment, corollaire.

IV.2 Normes

2.a) Définition

Définition 5.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application $\|\ \| : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** si :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0\ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

2.b) Norme 1

$\|\ \|_1 : f \longmapsto \displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t$ est une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions **continues** intégrables sur I $\mathcal{C}^0L^1(I,\mathbb{C}) = \{f : I \to \mathbb{C}; f \text{ continue et intégrable sur } I\}$.

2.c) Norme infinie.

$\|\ \|_\infty^I$ est une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions bornées $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{K}) = \{f : I \to \mathbb{C}; f \text{ bornée sur } I\}$.

Nouveau programme 2022-23

Intégration sur un intervalle quelconque (suite)

Contenus	Capacités & commentaires
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente.	
La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a, b[$, (respectivement $]a, b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
— si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(g(t)\right)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
— si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, — *intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;* — *étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.*	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

Contenus	Capacités & commentaires

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.