

Méthodes à retenir :

- Pour justifier qu'une fonction f est intégrable sur un intervalle I , on commence par établir qu'elle est continue ou continue sur le sous-ensemble le plus grand possible, PUIS pour chaque borne ouverte, on établit l'intégrabilité au voisinage via un théorème de comparaison, avant de conclure.
- Sur un intervalle quelconque I , si la suite (f_n) de fonctions continues p.m. CVS vers f , et s'il existe une fonction φ continue p.m., positive intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ (domination par majoration des $|f_n|$ indépendamment de n , par φ intégrable), le **théorème de convergence dominée** permet de montrer que, f et les f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I , que la suite numérique $\left(\int_I f_n\right)_n$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$
- Sur un intervalle quelconque I , le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$, lorsque la série de fonction c.p.m.intégrables converge simplement, et que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(t)| dt$ converge.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Démontrer que toute combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I intervalle est intégrable.

II. Exercices

Exercice 2 ☆☆

Etudier l'intégrabilité sur $I = [1, +\infty[$ de $x \mapsto x^{-n} \ln x$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 ☆☆

Etudier l'intégrabilité sur $I = [1, +\infty[$ de :

a) $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$;

b) $g : x \mapsto \ln(e^{\beta x} + x)$, selon les valeurs de β ;

Exercice 4 ☆☆

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2(1 - \cos x)}{x^2 + x^3}$.

1. Justifier la continuité de f sur \mathbb{R}_*^+ .
2. Donner un équivalent de f au voisinage de 0. En déduire que f est intégrable au voisinage de 0.
3. Dominer f au voisinage de $+\infty$ par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.
4. Conclure que f est intégrable sur \mathbb{R}_*^+

Exercice 5 ☆☆☆ Interversion $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et $\int_{[0,1]}$:

Théorème de convergence dominée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{(-t)^n}{1+t^2}$

- (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1]$.
- (b) Justifier que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue positive intégrable sur $[0, 1]$, et domine la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$).
- (c) Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f : t \mapsto 0$.

- En appliquant le théorème de convergence dominée, en déduire que la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t^2} dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } 0.$$

Exercice 6 ☆☆☆ Interversion $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_{[0,1]}$:

Théorème d'intégration terme à terme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^n \ln t$

- (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $]0, 1]$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue intégrable sur $]0, 1]$, et que :

$$\int_0^1 |v_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

- (c) En déduire que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_{[0,1]} |v_n|$ converge.

- Justifier que pour tout $t \in [0, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

- On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En appliquant le théorème d'intégration terme à terme, en déduire que : $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6}$

Exercice 7 ☆☆☆

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n + \sqrt{x}} dx$.

Justifier l'existence de v_n pour tout entier $n \geq 2$ et étudier la limite éventuelle de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 8 ☆☆☆

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}} dx$. Justifier qu'on peut définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis que cette suite converge et donner sa limite sous forme intégrale (on ne demande pas le calcul de l'intégrale).

Exercice 9 ☆☆☆ CCP PSI 2010

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Etudier l'intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{\text{Arctan } t}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, existence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{t^{3/2} + t^n} dt.$$

- Déterminer la limite éventuelle de la suite (I_n) .

III. Exercices avancés

Exercice 10 ★★

Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{dx}{x^n + e^x}$$

Exercice 11 ★★

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{t^\gamma} dt$ pour $\gamma > 1$.

Exercice 12 ★★★

Vérifier que $(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0 \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$, pour I intervalle réel.

Exercice 13 ★★★★★

Soit f de classe C^2 sur \mathbb{R} à valeurs réelles, telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur \mathbb{R} et $\lim_{+\infty} f' = 0 = \lim_{-\infty} f'$, prouver que $(f')^2$ est intégrable sur \mathbb{R} en utilisant une intégration par parties.

Exercice 14 ★★★★★ Intégrale d'une somme de fonctions

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$.

1. Justifier que l'on définit bien une fonction f sur \mathbb{R}_*^+ par l'expression précédente.
2. Montrer que f est continue sur $I =]0, +\infty[$.
notons qu'il suffit de montrer le résultat sur tout segment de I
3. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ et que

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1 + \sqrt{n+1})}$$

4. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Notes

¹⁴ correction : on minore $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ non intégrable en $+\infty$.