Ordre des exercices :

Méthodes à retenir :

- Pour justifier qu'une fonction f est ntégrable sur un intervalle I, on commence par établir qu'elle est continue ou continue sur le sous-ensemble le plus grand possible, PUIS pour chaque borne ouverte, on établie l'intégrabilité au voisinage via un théorème de comparaison, avant de concluire.
- Sur un intervalle quelconque I,
  si la suite (f_n) de fonctions continues p.m. **CVS vers** f,
  et s'il existe une fonction φ **continue p.m., positive intégrable sur** I telle que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)}$
  (domination par majoration des $|f_n|$ indépendemment de n, par φ intégrable),
  le **théorème de convergence dominée** permet de montrer que, f et les f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I, que la suite numérique $\left(\int_I f_n\right)_n$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$
- Sur un intervalle quelconque I, le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$, lorsque la série de fonction c.p.m.intégrables converge simplement, et que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Démontrer que toute combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I intervalle est intégrable.

II. Exercices

Exercice 2 ✰✰

Etudier l'intégrabilité sur $I = [1, +\infty[$ de $x \mapsto x^{-n} \ln x$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 ✰✰

Etudier l'intégrabilité sur $I = [1, +\infty[$ de :

a) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$;

b) $g : x \longmapsto \ln(e^{\beta x} + x)$, selon les valeurs de β ;

Exercice 4 ✰✰

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2 + x^3}$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de 0. En déduire que f est intégrable au voisinage de 0.
3. Dominer f au voisinage de $+\infty$ par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.
4. Conclure que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 5 ☆☆ *Interversion $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\int_{[0,1]}$:*

Théorème de convergence dominée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{(-t)^n}{1+t^2}$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$.
   (b) Justifier que la fonction
   $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue positive intégrable sur $[0,1]$, et domine la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$).
   (c) Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $f : t \mapsto 0$.
2. En appliquant le théorème de convergence dominée, en déduire que la suite
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 6 ☆☆ *Interversion $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_{[0,1]}$:*

Théorème d'intégration terme à terme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n :]0,1] \to \mathbb{R},\ t \longmapsto t^n \ln t$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $]0,1]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue intégrable sur $]0,1]$, et que :
   $\displaystyle\int_0^1 |v_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$.
   (c) En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_{]0,1]} |v_n|$ converge.
2. Justifier que pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.
3. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   En appliquant le théorème d'intégration terme à terme, en déduire que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{-\pi^2}{6}$

Exercice 7 ☆☆

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n+\sqrt{x}}dx.$
Justifier l'existence de v_n pour tout entier $n \geq 2$ et étudier la limite éventuelle de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 8 ☆☆

On pose pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{n+3}}dx$. Justifier qu'on peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis que cette suite converge et donner sa limite sous forme intégrale (on ne demande pas le calcul de l'intégrale).

Exercice 9 ☆☆ *CCINP PSI*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est intégrable sur $]0,1[$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

III. Exercices avancés

Exercice 10 ✰✰

Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x}$$

Exercice 11 ✰✰

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^n\frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t^\gamma}\mathrm{d}t$ pour $\gamma>1$.

Exercice 12 ✰✰✰

Vérifier que $(f,g)\mapsto\displaystyle\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$, pour I intervalle réel.

Exercice 13 ✰✰✰✰

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{+\infty} f'=0=\lim\limits_{-\infty} f'$, prouver que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ en utilisant une intégration par parties.

Exercice 14 ✰✰

Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1) Existencede F sur]0,+∞[.

2) Calculer la limite en $+\infty$ de $xF(x)$. On pourra calculer la limite de $(nF(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) Donner un équivalent de $F(n)$ quand $n\to+\infty$.

Exercice 15 ✰✰✰ *Intégrale d'une somme de fonctions*

Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$.

1. Justifier que l'on définit bien une fonction f sur $\mathbb{R}_*^+$ par l'expression précédente.
2. Montrer que f est continue sur $I=]0,+\infty[$.
   notons qu'il suffit de montrer le résultat sur tout segment de I
3. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(1+\sqrt{n+1})}$$

4. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 16 ✰✰✰

Soit $f:[1,\mathrm{e}[\to R$ continue par morceaux et intégrable sur $[1,e[$.

On définit une suite $(f_n)_n$ de fonctions par $f_n(t)=t^{1/n}f(t)$ si $t\in[1,(1+1/n)^n[$ et $f_n(t)=0$ si $t\in[(1+1/n)^n,\mathrm{e}[$.

Montrer, en justifiant très précisément, que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[1,\mathrm{e}[$ vers une fonction qu'on précisera.Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{(1+1/n)^n}x^{1/n}f(x)dx=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)dx$.

Exercice 17 ✰✰✰

Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+xn^2)}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier l'existence de I_n.
2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$
3) Trouver un équivalent de I_n

Notes

[15] correction : on minore $f(x) \geq \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ non intégrable en $+\infty$.