

# Table des matières

<b>I. Elements propres d'un endomorphisme ou d'une matrice</b>	<b>3</b>
I.1 Rappel : sous-espaces stables . . . . .	3
I.2 Droites stables . . . . .	3
I.3 Valeurs propres, sous-espaces propres . . . . .	4
I.4 Lien avec les polynômes annulateurs . . . . .	6
I.5 Polynôme caractéristique . . . . .	6
5.a) Polynôme caractéristique d'une matrice . . . . .	6
5.b) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme . . . . .	7
I.6 Cayley-Hamilton et conséquence . . . . .	9
<b>II. Diagonalisation</b>	<b>10</b>
II.1 Diagonalisabilité . . . . .	10
1.a) Définition . . . . .	10
1.b) Application : Calcul de puissances par diagonalisation . . . . .	11
II.2 Critères de diagonalisabilité . . . . .	12
2.a) Espaces propres en somme directe . . . . .	12
2.b) Dimension des sous-espaces propres . . . . .	13
2.c) CS et CNS de diagonalisabilité . . . . .	13
II.3 Polynôme annulateur scindé et diagonalisabilité . . . . .	15
<b>III. Trigonalisation</b>	<b>16</b>
<b>IV. Autres applications</b>	<b>17</b>
IV.1 Sous-espaces propres d'endomorphismes qui commutent . . . . .	17
IV.2 Calcul de puissances par trigonalisation . . . . .	18
IV.3 <u>complément (HP ?) Systèmes linéaires</u> . . . . .	19
3.a) <u>complément (HP ?) Suites récurrentes linéaires d'ordre <math>\ell</math> à coefficients constants</u> . . . . .	19
3.b) B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées . . . . .	21

## Pré-requis

## Objectifs

# Table des matières

## Pré-requis

## Objectifs

On note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

# I. Elements propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

## I.1 Rappel : sous-espaces stables

Cadre :  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . On représente matriciellement les vecteurs  $\vec{v}$  de  $E$  à l'aide de vecteurs colonnes  $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{v})$ .

### Définition 1 (sev stable).

On dit qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est **stable par  $u$**  si :  $u(F) \subset F$

### Proposition 1.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $u$ .

*démonstration* : Pour  $x \in \text{Ker}(u)$ , on a  $u(u(x)) \underset{x \in \text{Ker } u}{=} u(0_E) = 0_E$ , donc  $u(x) \in \text{Ker}(u)$ , ainsi  $u(\text{Ker}(u)) \subset \text{Ker}(u)$ .

Pour  $y \in \text{Im}(u)$ , soit  $x \in E$  tel que  $u(x) = y$  un antécédant de  $y$  par  $u$ .

$u(y) = u(u(x))$ , donc  $u(x)$  est un antécédant de  $u(y)$  par  $u$ , donc  $u(y) \in \text{Im}(u)$ , ainsi  $u(\text{Im}(u)) \subset \text{Im}(u)$ .  $\square$

## I.2 Droites stables

### Définition 2 (droite stable).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Une droite vectorielle  $D = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(\vec{v}) = \{\alpha \vec{v}; \alpha \in \mathbb{K}\}$  dirigée par un vecteur non nul  $\vec{v}$  est dite **stable par  $u$**  si :  $u(D) \subset D$

### Proposition 2.

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\vec{v} \in E$  un vecteur NON NUL, dirigeant la droite  $D = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(\vec{v})$ .

Alors  $D$  est stable par  $u$  si et seulement si  $\exists \lambda \in \mathbb{K}; u(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ .

*démonstration* :

### I.3 Valeurs propres, sous-espaces propres

#### Définition 3 (vecteur propre).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Un vecteur  $\vec{v} \in E$  est dit **vecteur propre** de  $u$  si

$$\begin{cases} \vec{v} \neq \vec{0}_E \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}; u(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \end{cases}$$

Pour un tel  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on dit que le vecteur propre  $\vec{v}$  est associé à la valeur (propre)  $\lambda$ .

*Remarque 1.* Si  $\vec{v} \in E$  est un vecteur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$  associé à la valeur  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors, par linéarité, tout vecteur colinéaire à  $\vec{v}$  et non nul est aussi vecteur propre de  $u$  associé à  $\lambda$ .

#### Proposition 3.

Pour un vecteur  $\vec{v}$  NON NUL, on a l'équivalence entre :

- i)  $\vec{v}$  est un vecteur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$
- ii) la droite  $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(\vec{v})$  est stable par  $u$ .

#### Définition 4 (valeur propre).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est dit **valeur propre** de  $u$  s'il existe un vecteur  $\vec{v} \in E$  **NON NUL** tel que :

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{v} \neq \vec{0} \\ u(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \end{cases}$$

Pour un tel vecteur  $\vec{v} \in E$  (NON NUL), on dit que la valeur propre  $\lambda$  est associé au vecteur (propre)  $\vec{v}$ .

*Remarque 2.* Un vecteur propre  $\vec{v}$  est par définition **NON NUL**! (sinon, tout scalaire conviendrait...)

*Remarque 3.* Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\vec{v} \in E$ . On a :

$$u(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff (u - \lambda \text{id}_E)(\vec{v}) = \vec{0}_E \iff \vec{v} \in \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$$

**exemple 1.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$  dont la matrice dans la base canonique est :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

#### Proposition 4.

$\lambda$  est valeur propre de  $u$  ssi  $u - \lambda \text{id}_E$  est non inversible

$\lambda$  est valeur propre de  $u$  ssi  $\det(\lambda \text{id}_E - u) = 0$

démonstration:  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \iff \text{Ker}(\lambda \text{id}_E - u) \supsetneq \{\vec{0}_E\} \iff \lambda \text{id}_E - u \text{ non injective} \iff \lambda \text{id}_E - u \text{ non bijective} \iff \det(\lambda \text{id}_E - u) = 0_{\mathbb{K}}$ .

**Définition 5** (spectre).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **spectre** de  $u$  dans  $\mathbb{K}$  l'ensemble noté  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$  défini par :

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K}; \exists \vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}_E\}, u(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \right\}$$

il s'agit de l'ensemble des valeurs propres de  $u$  appartenant à  $\mathbb{K}$ .

**Définition 6** (sous-espace propre).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$  une valeur propre de  $u$ .

On définit le **sous-espace propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , noté  $E_{u,\lambda}$  ou  $E_{\lambda}$  par :

$$E_{u,\lambda} = \text{Ker}(\lambda \text{id}_E - u) = \{ \vec{v} \in E; u(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \}$$

**lemme 5.** Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ,  $E_{u,\lambda}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant au moins une droite stable engendrée par un vecteur propre  $\vec{v}$  (non nul!!!) associé à  $\lambda$ . En particulier,  $\dim E_{u,\lambda} \geq 1$ .

Remarque 4. Ces définitions s'étendent aux matrices  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ , via l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé.

**Définition 7** (valeur propre).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est dit **valeur propre** de  $A$  s'il existe un vecteur  $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  **NON**

**NUL** tel que : (1) 
$$\begin{cases} V \neq 0_{n,1} \\ AV = \lambda V \end{cases}$$

**Définition 8** (vecteur (colonne) propre).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . Un vecteur  $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est dit **vecteur propre** de  $A$  si

$$\begin{cases} V \neq 0_{n,1} \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}; AV = \lambda V \end{cases}$$

**Définition 9** (sous-espace propre).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Le **sous-espace-propre** associé est :

$$E_{\lambda,A} = \text{Ker}(\lambda I_n - A) \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

**Définition 10** (spectre).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . Le spectre de  $A$  est :  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}; \exists V \in E; V \neq 0_{n,1}, \text{ et } AV = \lambda V\}$ .

### I.4 Lien avec les polynômes annulateurs

**lemme 6.** Soient  $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$

Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$

dém pour un monôme  $P = X^k$  vrai par récurrence sur  $k$ , puis passe aux combinaisons linéaires.

**Proposition 7.**

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est annulateur de  $u$ , alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

dém :

$$0_E = P(u)(x) = \sum_{k=0}^d a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k x = P(\lambda)x, \text{ avec } x \neq 0_E \text{ tel que } u(x) = \lambda x, \text{ donc } P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$$

Remarque 5.  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \subset \{z \in \mathbb{K}; P(z) = 0\}$ , l'inclusion peut être stricte

### I.5 Polynôme caractéristique

#### 5.a) Polynôme caractéristique d'une matrice

Remarque 6. Pour  $A \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \text{Ker}(\lambda I_n - A) \supsetneq \{0_{n,1}\} \iff \lambda I_n - A \text{ non inject.} \iff \lambda I_n - A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0_{\mathbb{K}}$$

**lemme 8.** Pour  $C_1, \dots, C_n$  des vecteurs colonnes de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $E_1, \dots, E_n$  la base canonique de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $x \in \mathbb{K}$ , on

$$\begin{aligned} \alpha : \det(xI_n - [C_1, \dots, C_n]) &= \det([xE_1 - C_1, \dots, xE_n - C_n]) \\ &= x^n - \text{Tr}([C_1, \dots, C_n]) x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det([C_1, \dots, C_n]) x^0 \end{aligned}$$

**Définition 11.**

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . L'application  $x \mapsto \det(xI_n - A)$  est polynomiale de degré  $n$  en  $x$  et unitaire. On la note  $\chi_A$ , et le polynôme de  $\mathbb{K}_n[X]$  associé est appelé **polynôme caractéristique** de  $A$ .

**Définition 12** (multiplicité).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ , et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ .

On appelle **multiplicité de la valeur propre  $\lambda$**  la multiplicité de la racine  $\lambda$  dans le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$ .

(i.e.  $m_\lambda$  est la puissance de  $X - \lambda$  dans  $\chi_A$ )

**Proposition 9.**

Soient  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ . Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ . Soient  $s \in \mathbb{N}$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , de multiplicités respectives  $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$ .

Alors  $\sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} = n$  et  $\chi_A = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$

*démonstration* : L'ensemble des racines complexes deux à deux distinctes de  $\chi_A$  est  $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ . Comme le terme dominant de  $\chi_A$  est  $X^n$ , la définition des  $(m_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq s}$  assure le résultat.  $\square$

**Proposition 10.**

Soient  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ , et  $\chi_A = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$  son polynôme caractéristique scindé, avec  $s \in \mathbb{N}$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , de multiplicités respectives  $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$ .

Alors  $\det(A) = \prod_{i=1}^s \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$  et  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} \lambda_i$

*démonstration* :  $\det(0I_n - A) = (-1)^n \det(A) = \chi_A(0) = \prod_{i=1}^s (-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}} = (-1)^n \prod_{i=1}^s \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$ ,

donc  $\det(A) = \prod_{i=1}^s \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$

$\sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=1}^{m_{\lambda_i}} (0 - \lambda_i) \right) = \sum_{i=1}^s -m_{\lambda_i} \lambda_i = \chi_A^{(n-1)}(0) = -\text{tr}(A)$

donc  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} \lambda_i$ .  $\square$

**Proposition 11.**

Deux matrices semblables sur  $\mathbb{K}$  ont même polynôme caractéristique.

*démonstration* :  $\chi_M(x) = \det(xI_n - M) = \det(P(xI_n - N)P^{-1}) = \chi_N(x)$ , si  $N = PMP^{-1}$ .  $\square$

## 5.b) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

**Définition 13.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . L'application  $x \mapsto \det(x \text{id}_E - u)$  est polynomiale de degré  $n$  en  $x$ . On la note  $\chi_u$ , et le polynôme de  $\mathbb{K}_n[X]$  associé est appelé **polynôme caractéristique** de  $u$ .

Remarque 7. Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \iff \text{Ker}(\text{id}_E - u) \supsetneq \{\vec{0}_E\} \iff \text{id}_E - u \text{ non injective} \iff \text{id}_E - u \text{ non bijective} \iff \det(\text{id}_E - u) = 0_{\mathbb{K}} \iff \chi_u(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}.$$

**Définition 14** (multiplicité).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ), et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u$  (resp. de  $A$ ).

On appelle multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  la multiplicité de la racine  $\lambda$  dans le polynôme caractéristique  $\chi_u$  de  $u$  (resp.  $\chi_A$  de  $A$ ).

(i.e.  $m_{\lambda}$  est la puissance de  $X - \lambda$  dans  $\chi_u$ )

**Proposition 12.**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $E$  de dimension  $n$ . Le polynôme caractéristique  $\chi_u$  de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ . Soient  $s \in \mathbb{N}$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , de multiplicités respectives

$$m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}. \text{ Alors } \sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} = n \text{ et } \chi_u = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

démonstration : L'ensemble des racines deux à deux distinctes de  $\chi_u$  est  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ . Comme le terme dominant de  $\chi_u$  est  $X^n$ , la définition des  $(m_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq s}$  assure le résultat.  $\square$

**Proposition 13.**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $E$  de dimension  $n$  et  $\chi_u = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$  son polynôme caractéristique scindé, avec  $s \in \mathbb{N}$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , de multiplicités respectives  $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$ .

$$\text{Alors } \det(u) = \prod_{i=1}^s \lambda_i^{m_{\lambda_i}} \text{ et } \text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} \lambda_i$$

démonstration :  $u$  à le même polynôme caractéristique (respectivement trace, respectivement déterminant) que  $A$ , sa matrice représentative dans une base, d'où le résultat.

Remarque 8. Pour une matrice ou un endomorphisme en dimension finie, l'inversibilité est équivalente au fait que 0 n'est pas valeur propre, en utilisant le déterminant, par exemple.

## I.6 Cayley-Hamilton et conséquence

**Théorème 14** (Cayley-Hamilton (admis, preuve HP)).

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , son polynôme caractéristique est annulateur, c.à-d. :

$$\chi_A(A) = 0_n$$

Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , son polynôme caractéristique est annulateur, c.à-d. :

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Conséquence : pour calculer  $A^p$  en fonction de  $p$ , il suffit de savoir déterminer explicitement le reste  $R_p$  dans la division euclidienne de  $X^p$  par  $\chi_A$ , donnée par  $X^p = Q_p \chi_A + R_p$ , avec  $\deg(R_p) \leq n - 1$ .

## II. Diagonalisation

### II.1 Diagonalisabilité

#### 1.a) Définition

##### Définition 15 (diagonalisabilité).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  s'il existe une base  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale.

Remarque 9. Cela revient à trouver une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .

##### Proposition 15.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable,  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base de vecteurs telle que  $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) =$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$$

est diagonale.

Alors les vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$  sont des vecteurs propres associés dans cet ordre aux valeurs propres (répétées ou non)  $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$ . En outre, en notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , on a :

$$P^{-1}AP = D$$

$$PDP^{-1} = A$$

démonstration : Une base est constituée de vecteurs non nuls, donc les  $v_i$  sont des vecteurs propres, car  $u(v_i) = \lambda_i v_i$  d'après la matrice  $D$  dans la  $i$ ème colonne.

par définition des écritures matricielles de l'endomorphisme  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ , comme  $u(v_i) = \delta_i v_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on applique la formule de changement de base vue en PCSI.  $\square$

##### Définition 16 (diagonalisabilité).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si elle est semblable sur  $\mathbb{K}$  à une matrice diagonale.

$A$  diagonalisable  $\iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale;  $P^{-1}AP = D$ .

Remarque 10. l'endomorphisme  $u : V \mapsto A \times V$  canoniquement associé est diagonalisable ssi  $A$  l'est car pour l'endomorphisme canoniquement associé, la diagonalisabilité équivaut à l'existence d'une base de vecteurs propres, donc à une écriture matricielle diagonale relativement à une telle base de vecteurs propres.

## 1.b) Application : Calcul de puissances par diagonalisation

### Proposition 16.

Soit  $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n, D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$  diagonale, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, D^k = \begin{pmatrix} \delta_1^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n^k \end{pmatrix}$$

pour  $k = 0$ , on a  $I_n = D^0 = \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ .

Supposons la relation est vraie pour un indice  $k \in \mathbb{N}$  fixé. Alors  $D^{k+1} = \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) \text{Diag}(\delta_1^k, \dots, \delta_n^k) = \text{Diag}(\delta_1^{k+1}, \dots, \delta_n^{k+1})$ , d'où l'hérédité.  $\square$

### Proposition 17.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable,  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base de vecteurs propres associés dans cet ordre

aux valeurs propres (répétées ou non)  $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n, \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix} = D.$

En notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P D^k P^{-1}$$

démonstration : par récurrence sur  $k$ .

pour  $k = 0$ , on a  $I_n = A^0 = P^{-1} I_n P = D^0$ .

Supposons la relation est vraie pour un indice  $k \in \mathbb{N}$  fixé. Alors  $A^{k+1} = A \times A^k = P D P^{-1} P D^k P^{-1} = P D I_n D^k P^{-1} = P D^{k+1} P^{-1}$ , d'où l'hérédité.  $\square$

## II.2 Critères de diagonalisabilité

### 2.a) Espaces propres en somme directe

**lemme 18.** Toute famille de vecteurs propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

*démonstration :* on montre le résultat par récurrence sur le nombre  $k \geq 1$  de vecteurs propres considérés.

- l'initialisation pour  $k = 1$  est immédiate.
- Supposons le résultat vrai pour toute famille d'au plus  $k - 1$  vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2, pour un  $k \geq 2$  fixé.

Soient  $v_1, \dots, v_k$  des vecteurs propres de  $u$  associés aux valeurs propres distinctes deux à deux on a :  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, u(v_i) = \lambda_i v_i$ .

Pour des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tels que  $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0_E$  (1).

Supposons qu'il existe  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$  tel que  $\alpha_j \neq 0$ . Alors par linéarité de  $u$ , on obtient :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i u(v_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i v_i = u(0_E) = 0_E, \text{ donc } \lambda_j \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + \sum_{i=1, i \neq j}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0_E \text{ donc en utilisant (1),}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq k, i \neq j} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0_E \quad (2)$$

$1 \leq i \leq k, i \neq j$

Il s'agit en fait d'une somme de  $k - 1$  termes, combinaison linéaires de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ! D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc  $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) = 0, \forall i \neq j$ , donc  $\alpha_i = 0, \forall i \neq j$ , puis dans (1),  $\alpha_j = 0$ , d'où la liberté de  $(v_1, \dots, v_k)$   $\square$

**lemme 19.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E), s \in \mathbb{N}^*$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ .

Alors la somme des sous-espaces propres est directe :

$$\sum_{i=1}^s E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i} \subset E; \text{ et de plus, } \dim \left( \sum_{i=1}^d E_{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^d \dim E_{\lambda_i}$$

*démonstration :*

Pour  $F = \sum_{i=1}^d E_{\lambda_i}$ , montrons que tout vecteur  $\vec{x} \in F$  admet une unique décomposition dans la somme  $\sum_{i=1}^d E_{\lambda_i}$ .

S'il existe  $(\vec{x}'_i)_{1 \leq i \leq s}, (\vec{x}''_i)_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^s E_{\lambda_i}$  tels que  $\vec{x} = \sum_{i=1}^s \vec{x}'_i = \sum_{i=1}^s \vec{x}''_i$ , alors on obtient :

$$\sum_{i=1}^s 1(\vec{x}'_i - \vec{x}''_i) = \vec{0} \quad (\star)$$

Par l'absurde, si  $(\vec{x}'_i - \vec{x}''_i)_{1 \leq i \leq s} \neq (\vec{0})_{1 \leq i \leq s}$ , la relation  $(\star)$  est une relation de dépendance linéaire à coefficients non nuls et faisant intervenir des vecteurs nuls ou vecteurs propres, avec au moins un vecteur non nul : cela contredit la liberté de la famille de vecteurs propres constituée des  $\vec{x}'_i - \vec{x}''_i \neq \vec{0}$  pour  $1 \leq i \leq s$ , Impossible !

Donc  $\vec{x}'_i - \vec{x}''_i = \vec{0}$  pour tout  $1 \leq i \leq s$ , et l'unicité.  $\square$

## 2.b) Dimension des sous-espaces propres

**lemme 20.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  **stable** par  $u$ . Alors  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ .

*démonstration :* Soit  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . Dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , on calcule par blocs, pour  $x \in \mathbb{K}$  :  $\chi_u(x) = \det([u - xid_E]_{\mathcal{B}}) = \det([u|_F - xid_F]) \times \det([u|_G^G - xid_G])$ , donc  $\chi_{u|_F} = \det([u|_F - xid_F])$  divise  $\chi_u(x)$ , et ce pour tout  $x \in \mathbb{K}$ .  $\square$

**Proposition 21** (majoration de la dimension des s.e.p. par leur multiplicité).

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$ , de multiplicité  $m_\lambda$ , et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé.

Alors  $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$ .

*démonstration :*

Tout d'abord comme  $\lambda$  est une valeur propre,  $u - \lambda id$  n'est pas injective, donc  $d_\lambda = \dim(E_\lambda) \geq 1$ .

Pour  $F = E_\lambda$ , et  $d_\lambda$  sa dimension, on remarque que  $u|_F = \lambda id_F$ , donc  $\chi_{u|_F} = (\lambda - X)^{d_\lambda}$ . En notant  $s$  le nombre de valeurs propres distinctes de  $u$ , et  $\lambda_2, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes et distinctes de  $\lambda$ , de multiplicités respectives  $m_{\lambda_2}, \dots, m_{\lambda_s}$ , on obtient, grâce à la factorisation sur  $\mathbb{C}$  :

$$(X - \lambda)^{d_\lambda} | (X - \lambda)^{m_\lambda} \prod_{i=2}^s (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}.$$

Comme  $(X - \lambda)^{d_\lambda}$  est premier avec  $\prod_{i=2}^s (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ , on a donc  $(X - \lambda)^{d_\lambda} | (X - \lambda)^{m_\lambda}$ , donc  $d_\lambda \leq m_\lambda$ .  $\square$

## 2.c) CS et CNS de diagonalisabilité

**Théorème 22** (CNS de diagonalisabilité).

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , de multiplicités respectives  $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$ , et  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$  leurs sous-espaces propres respectifs.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i)  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ ;

ii)  $E = \bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$  ;

iii)  $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}$  et  $\sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} = n$ .

iv)  $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda)$ .

démonstration: l'implication  $i) \Rightarrow ii)$  est vraie, car alors  $E \subset \sum E_{\lambda}$  (puisque chaque droite  $\text{Vect}(v_i) \subset \text{Ker}(\lambda_i \text{id}_E - u) = E_{\lambda_i}$ ), d'où l'égalité.

l'implication  $ii) \Rightarrow i)$  est immédiate, car toute base adaptée dans une base de vecteurs propres regroupés en blocs par valeurs propres identiques, on obtient une base de  $E$  adaptée à la somme des directe des sous-espaces propres.

On a donc l'équivalence  $i) \iff ii)$ .

On a dans le cas général :  $n = \dim E = \deg \chi_u = \sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} \geq \sum_{i=1}^s \dim E_{\lambda_i}$  et  $\forall 1 \leq i \leq s, 1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq m_{\lambda_i}$ .

Supposons  $ii)$ . Dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$ , on a, pour tout  $x \in \mathbb{K}, \det([u - x \text{id}]_{\mathcal{B}}) = (-1)^n \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{\dim(E_{\lambda_i})}$ . Comme  $\chi_u(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ , on obtient en identifiant : pour tout  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket, m_{\lambda_i} = \dim(E_{\lambda_i})$ , d'où  $iii)$ .

Supposons  $iii)$ . On sait que  $\sum_{i=1}^s E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$ . Comme  $\sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} = \deg(\chi_u) = \dim(E)$ , on obtient :

$\dim(\bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i})$  somme directe  $= \sum_{i=1}^s \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^s m_{\lambda_i} = \dim(E)$ , donc l'inclusion  $\bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i} \subset E$  est en fait une égalité, d'où  $ii)$ .  $\square$

Variante sommes directes  $ii) \iff iv)$

**Proposition 23** (CS de diagonalisabilité).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de polynôme caractéristique  $\chi_u$ .

Si  $\chi_u$  est **scindé à racines simples** sur  $\mathbb{K}$ , alors  $u$  est **diagonalisable** sur  $\mathbb{K}$ .

démonstration :

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  valeurs propres distinctes de  $u$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \dim(E_{\lambda_i}) \geq 1$ , donc on a  $\sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}) \geq$

$n = \dim E$ . Comme on a toujours  $\sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}) \leq n = \dim E$ , on obtient l'égalité.

Donc  $m_{\lambda_i} = 1 = \dim(E_{\lambda_i}), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le  $iii)$  du théorème précédent donne le résultat.  $\square$

**Proposition 24** (CS de diagonalisabilité).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  de polynôme caractéristique  $\chi_A$ .

Si  $\chi_A$  est **scindé à racines simples** sur  $\mathbb{K}$ , alors  $A$  est **diagonalisable** sur  $\mathbb{K}$ .

Remarque 11. !!!!!

**Attention, la réciproque est fautive :**

$\chi_{id} = (1 - X)^n$  n'est pas scindé à racines simples, pourtant  $id$  est diagonalisable.

**exemple 2.** Projecteurs :  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ , avec  $\text{Im}(p) = \text{Inv}(p) = \{v; p(v) = v\}$

**exemple 3.** Symétrie  $E = \text{Opp}(p) \oplus \text{Inv}(p)$ , avec  $\text{Inv}(p) = \{v; s(v) = v\}$  et  $\text{Opp}(p) = \{v; s(v) = -v\}$

## II.3 Polynôme annulateur scindé et diagonalisabilité

### Théorème 25.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  $u$  est **diagonalisable** (sur  $\mathbb{K}$ ) si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de  $u$  scindé à racines simples.

*démonstration :*

• condition nécessaire : Notons  $\{\lambda_1 \dots, \lambda_s\} = Sp(u)$ , pour un entier  $s \leq n$ , et  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq s} \in \mathbb{K}^s$  (deux à deux distincts).

Comme  $u$  est diagonalisable, on a  $E = \bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$ , où  $\forall 1 \leq i \leq s$ ,  $E_{\lambda_i}$  est le sous-espace propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

Montrons que le polynôme  $P = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)$  annule  $u$  : Pour tout  $1 \leq j \leq s$ , et tout vecteur  $v_j \in E_{\lambda_j}$ , on a :

$u(v_j) = \lambda_j v_j$ , donc  $(P(u))(v_j) = \left( \bigcirc_{1 \leq i \leq s, i \neq j} (u - \lambda_i id_E) \right) \circ (u - \lambda_j id_E)(v_j) = 0_E$ . Par linéarité de  $u$ , on en déduit

que pour tout  $x \in E$ , en notant  $x = \sum_{j=1}^s v_j$  sa décomposition dans la somme directe  $E = \bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$ ,  $P(u)(x) =$

$\sum_{j=1}^s P(u)(v_j) = 0_E$ , donc  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

• condition suffisante : Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{K}^d$  deux à deux distincts, tels que  $P = \prod_{i=1}^d (X - \mu_i)$  soit annulateur de  $u$ . Pour tout  $1 \leq i \leq d$ , on note  $F_i = \text{Ker}(u - \mu_i id_E)$ , et l'on va montrer que  $E = \bigoplus_{i=1}^d F_i$ .

◇ montrons que la somme  $\sum_{i=1}^d F_i$  est directe :

Soit  $1 \leq i \leq d$ . Si  $\mu_i$  n'est pas une valeur propre de  $u$ , alors  $u - \mu_i id_E$  est bijective, et  $F_i = \text{Ker}(u - \mu_i id_E) = \{0_E\}$ . Si  $\mu_i$  est une valeur propre de  $u$ , alors  $F_i$  est le sous-espace propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\mu_i$ . Comme la somme des sous-espace propres de  $u$  est directe, la somme  $\sum_{i=1}^d F_i$  est constituée d'espaces vectoriels réduits au vecteur nul

et de sous-espaces propres (associés à des valeurs propres distinctes) donc est directe :  $\sum_{i=1}^d F_i = \sum_{1 \leq i \leq d, \mu_i \text{ vp}} E_{\mu_i} =$

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq d, \mu_i \text{ vp}} E_{\mu_i}$$

◇ montrons que  $E = \bigoplus_{i=1}^d F_i$  :

Rappel : en notant  $L_i = \prod_{1 \leq j \leq d, j \neq i} \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j}$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ , la famille  $(L_i)_{1 \leq i \leq d}$  est une base de  $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ .

Comme  $1 = \sum_{i=1}^d L_i$ , on obtient :  $id_E = \sum_{i=1}^d L_i(u)$ . Ainsi pour tout  $x \in E$ , en notant  $x_i = L_i(u)(x)$ , pour tout

$1 \leq i \leq d$ , on a  $x = \sum_{i=1}^d x_i$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  fixé, on a :  $(u - \mu_i id_E)(x_i) = (u - \mu_i id_E) \circ \left( \bigcirc_{1 \leq j \leq d, j \neq i} \frac{(u - \mu_j id_E)}{\mu_i - \mu_j} \right) (x)$ ,

donc  $(u - \mu_i id_E)(x_i) = \left( \prod_{1 \leq j \leq d, j \neq i} \frac{1}{\mu_i - \mu_j} \right) (P(u))(x) = 0_E$ , car  $P$  est annulateur de  $u$ .

Donc  $x_i \in F_i$ . Donc  $x = \sum_{i=1}^d x_i \in \sum_{i=1}^d F_i$ , et  $E = \sum_{i=1}^d F_i$ .

Finalement, on vient de montrer que  $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq d, \mu_i \text{ vp}} F_i = \bigoplus_{1 \leq i \leq d, \mu_i \text{ vp}} E_{\mu_i}$ , donc en prenant une base adaptée à cette décomposition de  $E$  en somme directe, on obtient que  $u$  est diagonalisable.  $\square$

**Corollaire 26.**

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

démonstration : tout polynôme annulateur de  $u$  annule encore les endo induits.

**Proposition 27.**

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u)} (X - \lambda)$  est annulateur de  $u$ .

démonstration : Si diagonalisable, on utilise la matrice dans une base adaptée et ok  
Réciproquement cf thm précédent

### III. Trigonalisation

**Définition 17.**

Une matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.

**Proposition 28** (C.N.S de trigonalisabilité).

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ .

$A$  est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

i.e. ssi  $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}); T = P^{-1}AP$  triangulaire

dém :

ADMIS, preuve non exigible

C.N. : clair,  $\chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_{ii})$

C.S. : par récurrence sur  $n$ .

initialisation  $n = 1$  : OK.

hérédité : Si  $\chi_u$  scindé pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $n = \dim E$ , alors  $\chi_u$  admet une racine  $\lambda$ , et pour  $v_1$  vecteur propre associé, on complète en une base  $\mathcal{B}' = (v_1, v'_2, \dots, v'_n)$  de  $E$ .

Mais alors pour  $F = \text{Vect}(v'_2, \dots, v'_n)$ , de dimension  $n - 1$ , par hypothèse de récurrence, on a pour  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $\text{Vect}(v_1)$  et  $w = p \circ u|_F$ ,  $\chi_w | \chi_u$ , et il existe une base  $(v_2, \dots, v_n)$  de  $F$  qui trigonalise  $w$ . Pour  $i \geq 2$ ,  $u(v_i) = \alpha_i c_1 + p \circ u|_F(v_i)$  qui est triangulaire supérieure.

**Définition 18.**

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de  $u$  est triangulaire.

## IV. Autres applications

### IV.1 Sous-espaces propres d'endomorphismes qui commutent

**Proposition 29.**

Soient  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Alors tout s.-e.v. stable par  $u$  est stable par  $v$ .

démonstration : Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable par  $u$ .

Pour  $x \in F$ , on a  $v(u(x)) = u(v(x))$

**Proposition 30.**

Soient  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Alors  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $v$ .

démonstration :  $u(x) = 0 \Rightarrow u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ .

$[y = u(x) \in \text{Im}(u)] \Rightarrow [v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}(u)]$ .  $\square$

### Application : diagonalisation simultanée

si  $u$  et  $v$  commutent, et que  $u$  est diagonalisable, alors les  $\lambda \text{Id}_E - u$  commutent avec  $v$ , donc les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ . Si les endomorphismes induits  $v|_{E_{\lambda,u}}$  sont diagonalisables dans des bases  $\mathcal{B}_\lambda$ , alors la famille  $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in Sp(u)}$  diagonalise  $u$  et  $v$ .

### Application : racine carrée d'une matrice

En particulier, lorsque  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , on peut ainsi déterminer les matrices  $R$  telles que  $R^2 = A$  : elles commutent avec  $A$  et les sous-espaces propres de  $A$  sont stables par de tels  $R$ .

Il suffit de diagonaliser  $A$ , et on obtient  $P^{-1}AP = D$  diagonale. En posant  $\Delta = P^{-1}RP$ , on a  $\Delta^2 = D$  et comme  $\Delta D = D\Delta$ , on en déduit que  $\Delta$  est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont des racines des valeurs propres de  $A$  correspondantes.

## IV.2 Calcul de puissances par trigonalisation

Lorsque la matrice  $A$  est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure  $D+N$ , avec  $\boxed{DN = ND}$ ,  $D$  diagonale.

On a  $N_{i,j} = 0 \forall i \geq j$  ( $N^m = 0_n$ , donc  $N$  est nilpotente), alors la formule du binôme de Newton montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (D + N)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} D^{p-k} N^k = D^p + pD^{p-1}N + \frac{p(p-1)}{2} D^{p-2}N^2 + \dots + \binom{p}{m-1} D^{p-m+1}N^{m-1}$$

ce qui permet de calculer  $A^p$  grâce aux formules de passage.

### IV.3 complément (HP ?) Systèmes linéaires

Remarque 12. Pour déterminer une suite  $(X_n)$  de  $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$  vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k$$

avec  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  connue, il suffit de savoir déterminer les puissances  $A^p$  pour tout  $p$  entier puis de remarquer que  $X_p = A^p X_0$ .

On parle de système de récurrence linéaire à coefficients constants sous la forme (détaillée) suivante :

$$\begin{cases} x_{(k+1),1} = a_{11}x_{(k),1} + \dots + a_{1n}x_{(k),n} \\ \dots \\ x_{(k+1),k} = a_{k1}x_{(k),1} + \dots + a_{kn}x_{(k),n} \\ \dots \\ x_{(k+1),n} = a_{n1}x_{(k),1} + \dots + a_{nn}x_{(k),n} \end{cases}$$

Où  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  sont fixés, le vecteur colonne (initial)  $X_0 = \begin{pmatrix} x_{(0),1} \\ \vdots \\ x_{(0),n} \end{pmatrix}$  est connu, et la suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de

vecteurs colonnes  $X_k = \begin{pmatrix} x_{(k),1} \\ \vdots \\ x_{(k),n} \end{pmatrix}$  est inconnue.

**exemple 4.** Soit  $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$  diagonalisable et dont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) sont  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Soient  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$  et  $P \in GL_3(\mathbb{K})$  telles que  $D = P^{-1}AP$ , on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = P \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En pratique : étant donné  $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ , la suite  $\left( P D^p P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \right)_p$  est l'unique suite  $(X_p)_p$  de vecteurs de  $\mathbb{K}^3$  telle que :

$$\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{p+1} = AX_p \end{cases}.$$

#### 3.a) complément (HP ?) Suites récurrentes linéaires d'ordre $\ell$ à coefficients constants

**Méthode :** Suites récurrentes linéaires d'ordre  $\ell$  à coefficients constants, sans second membre

Etant donné  $\ell \in \mathbb{N}$ , avec  $\ell \geq 2$ ,  $a_{\ell-1}, \dots, a_0$ , on cherche à trouver toutes les suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \dots + a_0u_n$$

A partir des conditions initiales  $(u_0, \dots, u_{\ell-1}) \in \mathbb{K}^\ell$ , on se ramène au cas précédent en posant  $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{\ell-1} \end{pmatrix}$ , et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & & & a_{\ell-1} \end{pmatrix} \quad \text{On vérifie alors que le polynôme caractéristique de } A \text{ est } \chi_A(r) = r^\ell - \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k r^k,$$

car :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \\ -a_0 & -a_1 & & & x - a_{\ell-1} \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{\ell-1} x^{i-1} C_i \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \\ P(x) & -a_1 & & & x - a_{\ell-1} \end{vmatrix}$$

où  $P(x) = -\sum_{j=0}^{\ell-2} a_j x^j - a_{\ell-1} x^{\ell-1} + x^\ell$   
(matrices compagnon).

**Proposition 31.**

En particulier pour une relation de récurrence  $u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \dots + a_0u_n$ , si le polynôme caractéristique  $\chi_A(r) = r^\ell - \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k r^k = \prod_{j=1}^n (r - \delta_j)$  est simplement scindé sur  $\mathbb{C}$ , alors il existe des constantes  $(c_1, \dots, c_n)$  telles que :  $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = \sum_{k=1}^n c_k \delta_k^p$ .

dém : On diagonalise et on a  $A^n = P D^n P^{-1}$ , donc  $A^n V_0$  est combinaison linéaire des coefficients de  $P, P^{-1}$  et des  $(\delta_j^n)$ .  $\square$

Remarque 13. Application numérique : calcul d'une valeur approchée de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives  $\lim \frac{\text{tr}(A^{k+1})}{\text{tr}(A^k)} = \lambda$ .

NOUVEAU programme 2022

### 3.b) B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année.

Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres);
- l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Éléments propres

Droite stable par un endomorphisme.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.

Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.

Si un polynôme  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.

Équation aux éléments propres  $u(x) = \lambda x$ .

Si  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .

Notation  $\text{Sp}(u)$ .

La notion de valeur spectrale est hors programme.

Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .

Équation aux éléments propres  $AX = \lambda X$ .

#### b) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.

Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.

Notations  $\chi_A, \chi_u$ .

Coefficients de degrés 0 et  $n - 1$ .

Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

La démonstration n'est pas exigible.

#### c) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

## CONTENUS

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à  $E$ .

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable.

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

Interprétation en termes d'endomorphisme.  
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.  
Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

Exemple des projecteurs et des symétries.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Polynôme caractéristique scindé à racines simples.  
Traduction matricielle.

**d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs**

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il admet  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  pour polynôme annulateur.

La démonstration n'est pas exigible.  
Traduction matricielle.

Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.

**e) Trigonalisation en dimension finie**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

La démonstration n'est pas exigible.  
Traduction matricielle.

La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.