Pré-requis

Objectifs

Table des matières

Pré-requis

Objectifs

On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

I. Elements propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

I.1 Rappel : sous-espaces stables

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$. On représente matriciellement les vecteurs $\overrightarrow{v}$ de E à l'aide de vecteurs colonnes $V\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})=mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v})$.

Définition 1 (sev stable).

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est $\boxed{\text{stable par } u}$ si : $\boxed{u(F)\subset F}$

Proposition 1.

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

démonstration : Pour $x\in\mathrm{Ker}(u)$, on a $u(u(x))\underset{x\in\mathrm{Ker}\,u}{=}u(0_E)=0_E$, donc $u(x)\in\mathrm{Ker}(u)$, ainsi $u\left(\mathrm{Ker}(u)\right)\subset\mathrm{Ker}(u)$.

Pour $y\in\mathrm{Im}(u)$, soit $x\in E$ tel que $u(x)=y$ un antécédant de y par u.

$u(y)=u(u(x))$, donc $u(x)$ est un antécédant de $u(y)$ par u, donc $u(y)\in\mathrm{Im}(u)$, ainsi $u\left(\mathrm{Im}(u)\right)\subset\mathrm{Im}(u)$. $\square$

I.2 Droites stables

Définition 2 (droite stable).

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Un droite vectorielle $D=\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})=\{\alpha\overrightarrow{v};\ \alpha\in\mathbb{K}\}$ dirigée par un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ est dite stable par u si : $u(D)\subset D$

Proposition 2.

Soient $u\in\mathcal{L}(E)$, $\overrightarrow{v}\in E$ un vecteur NON NUL, dirigeant la droite $D=\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})$.
Alors D est stable par u si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{K};\ u(\overrightarrow{v})=\lambda\overrightarrow{v}$.

démonstration :

I.3 Valeurs propres, sous-espaces propres

Définition 3 (vecteur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est dit **vecteur propre** de u si

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_E} \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}; \quad u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v} \end{cases}$$

Pour un tel $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que le vecteur propre $\overrightarrow{v}$ est associé à la valeur (propre) λ.

Remarque 1. Si $\overrightarrow{v} \in E$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ associé à la valeur $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, par linéarité, tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{v}$ et non nul est aussi vecteur propre de u associé à λ.

Proposition 3.

Pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ NON NUL, on a l'équivalence entre :

i) $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$

ii) la droite $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})$ est stable par u.

Définition 4 (valeur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de u s'il existe un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ **NON NUL** tel que :

$$(1) \quad \begin{cases} \overrightarrow{v} & \neq & \overrightarrow{0} \\ u(\overrightarrow{v}) & = & \lambda \overrightarrow{v} \end{cases}$$

Pour un tel vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ (NON NUL), on dit que la valeur propre λ est associé au vecteur (propre) $\overrightarrow{v}$.

Remarque 2. Un vecteur propre $\overrightarrow{v}$ est par définition **NON NUL**! (sinon, tout scalaire conviendrait...)

Remarque 3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\overrightarrow{v} \in E$. On a :

$$u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v} \iff (u - \lambda \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0_E} \iff \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$$

exemple 1. Soit f l'endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition 4.

λ est valeur propre de u ssi $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est non inversible
λ est valeur propre de u ssi $\boxed{\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0}$

démonstration : $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \iff \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) \supsetneq \{\overrightarrow{0_E}\} \iff \lambda \mathrm{id}_E - u$ non injective $\iff \lambda \mathrm{id}_E - u$ non bijective $\iff \det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 5 (spectre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre** de u dans $\mathbb{K}$ l'ensemble noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ défini par :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{K};\ \exists \overrightarrow{v} \in E \setminus \{\overrightarrow{0_E}\},\ u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}\right\}}$$

il s'agit de l'ensemble des valeurs propres de u appartenant à $\mathbb{K}$.

Définition 6 (sous-espace propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ une valeur propre de u.
On définit le **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ, noté $E_{u,\lambda}$ ou E_λ par :

$$\boxed{E_{u,\lambda} = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) = \{\overrightarrow{v} \in E;\ u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}\}}$$

lemme 5. *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, $E_{u,\lambda}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant au moins une droite stable engendrée par un vecteur propre $\overrightarrow{v}$ (non nul!!!) associé à λ. En particulier,* $\boxed{\dim E_{u,\lambda} \geq 1}$.

Remarque 4. Ces définitions s'étendent aux matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, via l'endomorphisme u canoniquement associé.

Définition 7 (valeur propre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **NON NUL** tel que : (1) $\left\{\begin{array}{ccc} V & \neq & 0_{n,1} \\ AV & = & \lambda V \end{array}\right.$

Définition 8 (vecteur (colonne) propre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Un vecteur $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit **vecteur propre** de A si

$$\left\{\begin{array}{rl} & V \neq 0_{n,1} \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}; & AV = \lambda V \end{array}\right.$$

Définition 9 (sous-espace propre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. Le **sous-espace-propre** associé est :
$E_{\lambda,A} = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 10 (spectre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Le spectre de A est : $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \exists V \in E;\ V \neq 0_{n,1}, \text{et } AV = \lambda V\}}$.

I.4 Lien avec les polynômes annulateurs

lemme 6. *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$*
Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$

dém pour un monôme $P = X^k$ vrai par récurrence sur k, puis passe aux combinaisons linéaires.

Proposition 7.

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

dém :

$0_E = P(u)(x) == \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$, avec $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$, donc $P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$

Remarque 5. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \subset \{z \in \mathbb{K}; P(z) = 0\}$, l'inclusion peut être stricte

I.5 Polynôme caractéristique

5.a) Polynôme caractéristique d'une matrice

Remarque 6. Pour $A \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \supsetneq \{0_{n,1}\} \iff \lambda I_n - A$ non inject. $\iff \lambda I_n - A \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0_{\mathbb{K}}$

lemme 8. *Pour $C_1, \ldots C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $E_1, \ldots E_n$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$, on a :* $\det(xI_n - [C_1, \ldots, C_n]) = \det([xE_1 - C_1, \ldots, xE_n - C_n])$
$= x^n - \mathrm{Tr}([C_1, \ldots, C_n])\ x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det([C_1, \ldots, C_n])\ x^0$

Définition 11.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale de degré n en x et unitaire. On la note χ_A, et le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ associé est appelé **polynôme caractéristique** de A.

Définition 12 (multiplicité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A.
On appelle $\boxed{\text{multiplicité de la valeur propre } \lambda}$ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_A de A.
(i.e. m_λ est la puissance de $X - \lambda$ dans χ_A)

Proposition 9.

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{C}$. Soient $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$.

Alors $\boxed{\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n}$ et $\boxed{\chi_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}}$

démonstration : L'ensemble des racines complexes deux à deux distinctes de χ_A est $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Comme le terme dominant de χ_A est X^n, la définition des $(m_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq s}$ assure le résultat. □

Proposition 10.

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et $\chi_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ son polynôme caractéristique scindé, avec $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$.

Alors $\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} \lambda_i}$

démonstration : $\det(0I_n - A) = (-1)^n \det(A) = \chi_A(0) = \prod (-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}} = (-1)^n \prod \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$,

donc $\det(A) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{m_{\lambda_i}} (0 - \lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^{s} -m_{\lambda_i} \lambda_i = \chi_A^{(n-1)}(0) = -\operatorname{tr}(A)$$

donc $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} \lambda_i$. □

Proposition 11.

Deux matrices semblables sur $\mathbb{K}$ ont même polynôme caractéristique.

démonstration : $\chi_M(x) = \det(xI_n - M) = \det(P(xI_n - N)P^{-1}) = \chi_N(x)$, si $N = PMP^{-1}$. □.

5.b) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $x \mapsto \det(x \operatorname{id}_E - u)$ est polynômiale de degré n en x. On la note χ_u, et le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ associé est appelé **polynôme caractéristique** de u.

Remarque 7. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \iff \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) \supsetneq \{\overrightarrow{0_E}\} \iff \lambda \mathrm{id}_E - u$ non injective $\iff \lambda \mathrm{id}_E - u$ non bijective $\iff \det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0_{\mathbb{K}} \iff \chi_u(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 14 (multiplicité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$), et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u (resp. de A).
On appelle $\boxed{\text{multiplicité de la valeur propre } \lambda}$ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_u de u (resp. χ_A de A).
(i.e. m_λ est la puissance de $X - \lambda$ dans χ_u)

Proposition 12.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension n. Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur $\mathbb{C}$. Soient $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_s}$. Alors $\boxed{\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n}$ et $\boxed{\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}}$

démonstration : L'ensemble des racines deux à deux distinctes de χ_u est $Sp_{\mathbb{C}}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. Comme le terme dominant de χ_u est X^n, la définition des $(m_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq s}$ assure le résultat. □

Proposition 13.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension n et $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ son polynôme caractéristique scindé, avec $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_s}$.
Alors $\boxed{\det(u) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} \lambda_i}$

démonstration : u à le même polynôme caractéristique (respectivement trace, respectivement déterminant) que A, sa matrice représentative dans une base, d'où le résultat.

Remarque 8. Pour une matrice ou un endomorphisme en dimension finie, l'inversibilité est équivalente au fait que 0 n'est pas valeur propre, en utilisant le déterminant, par exemple.

I.6 Cayley-Hamilton et conséquence

Théorème 14 (Cayley-Hamilton (admis, preuve HP)).

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son polynôme caractérisique est annulateur, c.à-d. :
$\boxed{\chi_A(A) = 0_n}$
Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, son polynôme caractérisique est annulateur, c.à-d. :
$\boxed{\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$

Conséquence : pour calculer A^p en fonction de p, il suffit de savoir déterminer explicitement le reste R_p dans la division euclidienne de X^p par χ_A, donnée par $X^p = Q_p\chi_A + R_p$, avec $\deg(R_p) \leq n-1$.

II. Diagonalisation

II.1 Diagonalisabilité

1.a) Définition

Définition 15 (diagonalisabilité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Remarque 9. Cela revient à trouver une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Proposition 15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs telle que $D = Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$ est diagonale.
Alors les vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ sont des vecteurs propres associés dans cet ordre aux valeurs propres (répétées ou non) $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$. En outre, en notant P la matrice de passage de la base canonique de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

$$\boxed{PDP^{-1} = A}$$

démonstration : Une base est constituée de vecteurs non nuls, donc les v_i sont des vecteurs propres, car $u(v_i) = \lambda_i v_i$ d'après la matrice D dans la $i$ème colonne.

par définition des écritures matricielles de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$, comme $u(v_i) = \delta_i v_i,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$, on appplique la formule de changement de base vue en PCSI. □

Définition 16 (diagonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice diagonale.
A diagonalisable $\Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ `diagonale` ; $\boxed{P^{-1}AP = D.}$

Remarque 10. l'endomorphisme $u : V \mapsto A \times V$ canoniquement associé est diagonalisable ssi A l'estc ar pour l'endomorphisme canoniquement associé, la diagonalisabilité équivaut à l'existence d'une base de vecteurs propres, donc à une écriture matricielle diagonale relativement à une telle base de vecteurs propres.

1.b) Application : Calcul de puissances par diagonalisation

Proposition 16.

Soit $(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\mathbb{K}^n$,$D=\begin{pmatrix}\delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n\end{pmatrix}$ diagonale, alors

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ D^k=\begin{pmatrix}\delta_1^k & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \delta_2^k & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1}^k & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n^k\end{pmatrix}}$$

pour $k=0$, on a $I_n=D^0=Diag(\delta_1,\dots,\delta_n)$.

Supposons la relation est vraie pour un indice $k\in\mathbb{N}$ fixé. Alors $D^{k+1}=Diag(\delta_1,\dots,\delta_n)Diag(\delta_1^k,\dots,\delta_n^k)=Diag(\delta_1^{k+1},\dots,\delta_n^{k+1})$, d'où l'hérédité. □

Proposition 17.

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathcal{B}'=(v_1,\dots,v_n)$ une base de vecteurs propres associés dans cet ordre aux valeurs propres (répétées ou non) $(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\mathbb{K}^n$, $Mat_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}\delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n\end{pmatrix}=D$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et $A=Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ A^k=PD^kP^{-1}}$$

démonstration : par récurrence sur k.

pour $k=0$, on a $I_n=A^0=P^{-1}I_nP=D^0$.

Supposons la relation est vraie pour un indice $k\in\mathbb{N}$ fixé. Alors $A^{k+1}=A\times A^k=PDP^{-1}PD^kP^{-1}=PDI_nD^kP^{-1}=PD^{k+1}P^{-1}$, d'où l'hérédité. □

II.2 Critères de diagonalisabilité

2.a) Espaces propres en somme directe

---

lemme 18. *Toute famille de vecteurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.*

---

démonstration : on montre le résultat par récurrence sur le nombre $k \geq 1$ de vecteurs propres considérés.

• l'initialisation pour $k = 1$ est immédiate.

• Supposons le résultat vrai pour toute famille d'au plus $k-1$ vecteurs propres associés à es valeurs propres distinctes 2 à 2, pour un $k \geq 2$ fixé.

Soient $v_1, \dots v_k$ des vecteurs propres de u associés aux valeurs propres distinctes deux à deux on a : $\forall i \in [\![1, k]\!],\ u(v_i) = \lambda_i v_i$.

Pour des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0_E \quad (1)$.

Supposons qu'il existe $j \in [\![1, k]\!]$ tel que $\alpha_j \neq 0$. Alors par linéarité de u, on obtient :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i = u(0_E) = 0_E$, donc $\displaystyle\lambda_j \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0_E$ donc en utilisant (1),
$\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq k,\ i \neq j} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0_E \quad (2)$

Il s'agit en fait d'une somme de $k-1$ termes, combinaison linéaires de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ! D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) = 0,\ \forall i \neq j$, donc $\alpha_i = 0,\ \forall i \neq j$, puis dans (1), $\alpha_j = 0$, d'où la liberté de $(v_1, \dots v_k)$ □

---

lemme 19. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $s \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux dictinctes de u.*
Alors la somme des sous-espaces propres est directe :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} \subset E$ *; et de plus,* $\displaystyle\dim\left(\sum_{i=1}^{d} E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} \dim E_{\lambda_i}$

---

démonstration :

Pour $\displaystyle F = \sum_{i=1}^{d} E_{\lambda_i}$, montrons que tout vecteur $\overrightarrow{x} \in F$ admet une unique décomposition dans la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} E_{\lambda_i}$.

S'il existe $\displaystyle(\overrightarrow{x_i})_{1 \leq i \leq s}, (\overrightarrow{x_i}')_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$ tels que $\displaystyle\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{s} \overrightarrow{x_i} = \sum_{i=1}^{s} \overrightarrow{x_i}'$, alors on obtient :

$$\sum_{i=1}^{s} 1(\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}') = \overrightarrow{0} \qquad (\star)$$

Par l'absurde, si $(\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}')_{1 \leq i \leq s} \neq (\overrightarrow{0})_{1 \leq i \leq s}$, la relation $(\star)$ est une relation de dépendance linéaire à coefficients non nuls et faisant intervenir des vecteurs nuls ou vecteurs propres, avec au moins un vecteur non nul : cela contredit la liberté de la famille de vecteurs propres constituée des $\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}' \neq \overrightarrow{0}$ pour $1 \leq i \leq s$, Impossible !

Donc $\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}' = \overrightarrow{0}$ pour tout $1 \leq i \leq s$, et l'unicité. □

2.b) Dimension des sous-espaces propres

lemme 20. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E* **stable** *par u. Alors* $\boxed{\chi_{u_{|F}} \text{ divise } \chi_u.}$

démonstration : Soit G un supplémentaire de F dans E. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, on calcule par blocs, pour $x \in \mathbb{K}$: $\chi_u(x) = \det([u - xid_E]_{\mathcal{B}}) = \det([u_{|F} - xid_F]) \times \det([u_{|G}^{|G} - xid_G])$, donc $\chi_{u_{|F}} = \det([u_{|F} - xid_F])$ divise $\chi_u(x)$, et ce pour tout $x \in \mathbb{K}$. □

Proposition 21 (majoration de la dimension des s.e.p. par leur multiplicité)**.**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, de multiplicité m_λ, et E_λ le sous-espace propre associé.
Alors $\boxed{1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda.}$

démonstration :
Tout d'abord comme λ est une valeur propre, $u - \lambda id$ n'est pas injective, donc $d_\lambda = \dim(E_\lambda) \geq 1$.
Pour $F = E_\lambda$, et d_λ sa dimension, on remarque que $u_{|F} = \lambda id_F$, donc $\chi_{u_{|F}} = (\lambda - X)^{d_\lambda}$. En notant s le nombre de valeur propres distinctes de u, et $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes et distinctes de λ, de multiplicités respectives $m_{\lambda_2}, \ldots, m_{\lambda_s}$, on obtient, grâce à la factorisation sur $\mathbb{C}$:

$$(X - \lambda)^{d_\lambda} | (X - \lambda)^{m_\lambda} \prod_{i=2}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}.$$

Comme $(X - \lambda)^{d_\lambda}$ est premier avec $\prod_{i=2}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$, on a donc $(X - \lambda)^{d_\lambda} | (X - \lambda)^{m_\lambda}$, donc $d_\lambda \leq m_\lambda$. □

2.c) CS et CNS de diagonalisabilité

Théorème 22 (CNS de diagonalisabilité)**.**

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_s}$, et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_s}$ leurs sous-espaces propres respectifs.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$;

ii) $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}}$;

iii) $\boxed{\forall i \in [\![1, s]\!],\ \dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}}$ et $\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n$.

iv) $\boxed{\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda)}$.

démonstration : l'implication $i) \Rightarrow ii)$ est vraie, car alors $E \subset \sum E_\lambda$ (puisque chaque droite $\mathrm{Vect}(v_i) \subset \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathrm{id}_E - u) = E_{\lambda_i}$), d'où l'égalité.

l'implication $ii) \Rightarrow i)$ est immédiate, car toute base adaptée dans une base de vecteurs propres regroupés en blocs par valeurs propres identiques, on obtient une base de E adaptée à la somme des directe des sous-espaces propres.

On a donc l'équivalence $i) \iff ii)$.

On a dans le cas général : $n = \dim E = \deg \chi_u = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} \geq \sum_{i=1}^{s} \dim E_{\lambda_i}$ et $\quad \forall\, 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq \dim E_{\lambda_i} \ \leq m_{\lambda_i}$.

Supposons $ii)$. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\det([u - xid]_{\mathcal{B}}) = (-1)^n \displaystyle\prod_{i=1}^{s} (x - \lambda_i)^{\dim(E_{\lambda_i})}$. Comme $\chi_u(x) = (-1)^n \displaystyle\prod_{i=1}^{s} (x - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$, on obtient en identifiant : pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $m_{\lambda_i} = \dim(E_{\lambda_i})$, d'où $iii)$.

Supposons $iii)$. On sait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$.Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = \deg(\chi_u) = \dim(E)$, on obtient :

$\dim(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}) \underset{somme\ directe}{=} \sum_{i=1}^{s} \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = \dim(E)$, donc l'inclusion $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} \subset E$ est en fait une égalité, d'où $ii)$. □

Variante sommes directes $ii) \iff iv)$

Proposition 23 (CS de diagonalisabilité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique χ_u.
Si $\boxed{\chi_u \text{ est scindé}}$ $\boxed{\textbf{à racines simples}}$ sur $\mathbb{K}$, <u>alors</u> $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$.

démonstration :

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de u. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}) \geq 1$, donc on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) \geq n = \dim E$. Comme on a toujours $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) \leq n = \dim E$, on obtient l'égalité.

Donc $m_{\lambda_1} = 1 = \dim(E_{\lambda_i}),\ \forall i \in [\![1, n]\!]$. Le iii) du théorème précédent donne le résultat. □

Proposition 24 (CS de diagonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ_A.
Si $\boxed{\chi_A \text{ est scindé}}$ $\boxed{\textbf{à racines simples}}$ sur $\mathbb{K}$, <u>alors</u> $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$.

Remarque 11. **!!!!!!**
Attention, la réciproque est fausse :
$\chi_{id} = (1 - X)^n$ n'est pas scindé à racines simples, pourtant id est diagonalisable.

exemple 2. Projecteurs : $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, avec $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Inv}(p) = \{v;\ p(v) = v\}$

exemple 3. Symétrie $E = \mathrm{Opp}(p) \oplus \mathrm{Inv}(p)$, avec $\mathrm{Inv}(p) = \{v;\ s(v) = v\}$ et $\mathrm{Opp}(p) = \{v;\ s(v) = -v\}$

II.3 Polynôme annulateur scindé et diagonalisabilité

Théorème 25.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est **diagonalisable** (sur $\mathbb{K}$) si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u scindé $\boxed{\text{à racines simples}}$.

démonstration :

• condition nécessaire : Notons $\{\lambda_1 \dots, \lambda_s\} = Sp(u)$, pour un entier $s \leq n$, et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq s} \in \mathbb{K}^s$ (deux à deux distincts). Comme u est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$, où $\forall 1 \leq i \leq s$, E_{λ_i} est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.

Montrons que le polynôme $P = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$ annule u : Pour tout $1 \leq j \leq s$, et tout vecteur $v_j \in E_{\lambda_j}$, on a : $u(v_j) = \lambda_j v_j$, donc $(P(u))(v_j) = (\bigcirc_{1\leq i\leq s,\ i\neq j} (u - \lambda_i id_E)) \circ (u - \lambda_j id_E)(v_j) = 0_E$. Par linéarité de u, on en déduit que pour tout $x \in E$, en notant $x = \sum_{j=1}^{s} v_j$ sa décomposition dans la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$, $P(u)(x) = \sum_{j=1}^{s} P(u)(v_j) = 0_E$, donc $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

• condition suffisante : Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $(\mu_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{K}^d$ deux à deux distincts, tels que $P = \prod_{i=1}^{d}(X - \mu_i)$ soit annulateur de u. Pour tout $1 \leq i \leq d$, on note $F_i = \mathrm{Ker}(u - \mu_i id_E)$, et l'on va montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{d} F_i$.

◇ montrons que la somme $\sum_{i=1}^{d} F_i$ est directe :

Soit $1 \leq i \leq d$. Si μ_i n'est pas une valeur propre de u, alors $u - \mu_i id_E$ est bijective, et $F_i = \mathrm{Ker}(u - \mu_i id_E) = \{0_E\}$. Si μ_i est une valeur propre de u, alors F_i est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre μ_i. Comme la somme des sous-espace propres de u est directe, la somme $\sum_{i=1}^{d} F_i$ est constituée d'espaces vectoriels réduits au vecteur nul et de sous-espaces propres (associés à des valeurs propres distinctes) donc est directe : $\sum_{i=1}^{d} F_i = \sum_{1\leq i\leq d,\ \mu_i \text{ vp}} E_{\mu_i} = \bigoplus_{1\leq i\leq d,\ \mu_i \text{ vp}} E_{\mu_i}$

◇ montrons que $E = \bigoplus_{i=1}^{d} F_i$:

Rappel : en notant $L_i = \prod_{1\leq j\leq d,\ j\neq i} \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j}$ pour tout $1 \leq i \leq d$, la famille $(L_i)_{1\leq i\leq d}$ est une base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$.

Comme $1 = \sum_{i=1}^{d} L_i$, on obtient : $id_E = \sum_{i=1}^{d} L_i(u)$. Ainsi pour tout $x \in E$, en notant $x_i = L_i(u)(x)$, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $x = \sum_{i=1}^{d} x_i$.

Pour $i \in [\![1, d]\!]$ fixé, on a : $(u - \mu_i id_E)(x_i) = (u - \mu_i id_E) \circ \left(\bigcirc_{1 \leq j \leq d,\ j \neq i} \dfrac{(u - \mu_j id_E)}{\mu_i - \mu_j} \right)(x)$,

donc $(u - \mu_i id_E)(x_i) = (\prod_{1 \leq j \leq d,\ j \neq i} \dfrac{1}{\mu_i - \mu_j})(P(u))(x) = 0_E$, car P est annulateur de u.

Donc $x_i \in F_i$. Donc $x = \sum_{i=1}^{d} x_i \in \sum_{i=1}^{d} F_i$, et $E = \sum_{i=1}^{d} F_i$.

Finalement, on vient de montrer que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq d,\ \mu_i \text{ vp}} F_i = \bigoplus_{1 \leq i \leq d,\ \mu_i \text{ vp}} E_{\mu_i}$, donc en prenant une base adaptée à cette décomposition de E en somme directe, on obtient que u est diagonalisable. □

Corollaire 26.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

démonstration : tout polynôme annulateur de u annule encore les endo induits.

Proposition 27.

Un endomorphisme u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si le polynôme $\prod \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)(X - \lambda)$ est annulateur de u.

démonstration : Si diagonalisable, on utilise la matrice dans une base adaptée et ok
Réciproquement cf thm précédent

III. Trigonalisation

Définition 17.

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 28 (C.N.S de trigonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\boxed{\text{le polynôme caractéristique}}$ χ_A de A est $\boxed{\text{scindé}}$ sur $\mathbb{K}$.

i.e. ssi $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{K});\ T = P^{-1}AP$ triangulaire

dém :
ADMIS, preuve non exigible
C.N. : clair, $\chi_T = \prod_{i=1}^{n}(X - t_{ii})$
C.S. : par récurrence sur n.
initialisation $n = 1$: OK.
hérédité : Si χ_u scindé pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $n = \dim E$, alors χ_u admet une racine λ, et pour v_1 vecteur propre associé, on complète en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2', \dots v_n')$ de E.
Mais alors pour $F = \mathrm{Vect}(v_2', \dots v_n')$, de dimension $n-1$, par hypothèse de récurrence, on a pour p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(v_1)$ et $w = p \circ u_{|F}$, $\chi_w | \chi_u$, et il existe une base $(v_2, \dots, v_n)$ de F qui trigonalise w. Pour $i \geq 2$, $u(v_i) = \alpha_i c_1 + p \circ u_{|F}(v_i)$ qui est triangulaire supérieure.

Définition 18.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire.

IV. Autres applications

IV.1 Sous-espaces propres d'endomorphismes qui commutent

Proposition 29.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$. Alors tout s.-e.v. stable par u est stable par v.

démonstration : Soit F un sous-espace vectoriel stable par u.
Pour $x \in F$, on a $v(u(x)) = u(v(x))$

Proposition 30.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$. Alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

démonstration : $u(x) = 0 \Rightarrow u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$.
$[y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)] \Rightarrow \ [v(y) = v(u(x)) = u((x)) \in \mathrm{Im}(u)]$. □

Application : diagonalisation simultanée

si u et v commutent, et que u est diagonalisable, alors les $\lambda \mathrm{Id}_E - u$ commutent avec v, donc les sous-espaces-propres de u sont stables par v. Si les endomorphismes induits $v_{|E_{\lambda,u}}$ sont diagonalisables dans des bases $\mathcal{B}_\lambda$, alors la famille $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in Sp(u)}$ diagonalise u et v.

Application : racine carrée d'une matrice

En particulier, lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on peut ainsi déterminer les matrices R telles que $R^2 = A$: elles commutent avec A et les sous-espaces propres de A sont stables par de tels R.

Il suffit de diagonaliser A, et on obtient $P^{-1}AP = D$ diagonale. En posant $\Delta = P^{-1}RP$, on a $\Delta^2 = D$ et comme $\Delta D = D\Delta$, on en déduit que Δ est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont des racines des valeurs propres de A correspondantes.

IV.2 Calcul de puissances par trigonalisation

Lorsque la matrice A est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure $D+N$, avec $\boxed{DN = ND}$, D diagonale.

On a $N_{i,j} = 0\ \forall i \geq j$ ($N^m = 0_n$, donc N est nilpotente), alors la formule du binôme de Newton montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k = D^p + pD^{n-1}N + \frac{p(p-1)}{2} D^{p-2} N^2 + \cdots + \binom{p}{m-1} D^{p-m+1} N^{m-1}$$

ce qui permet de calculer A^p grâce aux formules de passage.

IV.3 complément (HP ?) Systèmes linéaires

Remarque 12. Pour déterminer une suite (X_n) de $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k}$$

avec $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ connue, il suffit de savoir déterminer les puissances A^p pour tout p entier puis de remarquer que $X_p = A^p X_0$.

On parle de système de récurrence linéaire à coefficients constants sous la forme (détaillée) suivante :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_{(k+1),1} & = & a_{11}x_{(k),1} & +\cdots+ & a_{1n}x_{(k),n} \\ \cdots & & & & \\ x_{(k+1),k} & = & a_{k1}x_{(k),1} & +\cdots+ & a_{kn}x_{(k),n} \\ \cdots & & & & \\ x_{(k+1),n} & = & a_{n1}x_{(k),1} & +\cdots+ & a_{nn}x_{(k),n} \end{array}\right.$$

Où $(a_{i_j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *sont fixés, le vecteur colonne (initial)* $X_0 = \begin{pmatrix} x_{(0),1} \\ \vdots \\ x_{(0),n} \end{pmatrix}$ *est connu, et la suite* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *de vecteurs colonnes* $X_k = \begin{pmatrix} x_{(k),1} \\ \vdots \\ x_{(k),n} \end{pmatrix}$ *est inconnue.*

exemple 4. Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ **diagonalisable** et dont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Soient $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et $P \in GL_3(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$, on a :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = P \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

En pratique : étant donné $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, *la suite* $\left(PD^pP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}\right)_p$ *est l'unique suite* $(X_p)_p$ *de vecteurs de* $\mathbb{K}^3$ *telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{p+1} = AX_p \end{array}\right. .$$

3.a) complément (HP ?) Suites récurrentes linéaires d'ordre ℓ à coefficients consta

Méthode : *Suites récurrentes linéaires d'ordre ℓ à coefficients constants, sans second membre*

Etant donnés $\ell \in \mathbb{N}$, *avec* $\ell \geq 2$, $a_{\ell-1}, \ldots, a_0$, , *on cherche à trouver toutes les suites vérifiant la relation de récurrence :*

$$u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0 u_n$$

A partir des conditions initiales $(u_0, \dots, u_{\ell-1}) \in \mathbb{K}^\ell$, *on se ramène au cas précédent en posant* $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{\ell-1} \end{pmatrix}$, *et*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & & & a_{\ell-1} \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que le polynôme caractéristique de A *est* $\chi_A(r) = r^\ell - \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k r^k$, *car :*

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \\ -a_0 & -a_1 & & & x - a_{\ell-1} \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} C_i}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \\ P(x) & -a_1 & & & x - a_{\ell-1} \end{vmatrix}$$

où $P(x) = -\sum_{j=0}^{\ell-2} a_j x^j - a_{\ell-1} x^{\ell-1} + x^\ell$
(matrices compagnon).

Proposition 31.

En particulier pour une relation de récurrence $u_{n+\ell} = a_{\ell-1} u_{n+\ell-1} + \dots + a_0 u_n$, *si le polynôme caractéristique* $\chi_A(r) = r^\ell - \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k r^k = \prod_{j=1}^{n} (r - \delta_j)$ *est simplement scindé sur* $\mathbb{C}$, *alors il existe des constantes* $(c_1 \dots, c_n)$ *telles que :* $\forall p \in \mathbb{N},\ u_p = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_k^p$.

dém : On diagonalise et on a $A^n = PD^nP^{-1}$, *donc* $A^n V_0$ *est combinaison linéaire des coefficients de* P, P^{-1} *et des* (δ_j^n). $\square$

Remarque 13. Application numérique : calcul d'une valeur approchée de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives $\lim \dfrac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \lambda$.

NOUVEAU programme 2022

3.b) B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année.
Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :
— *l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;*
— *l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).*

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
c) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.	

e) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle.
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.