Méthodes à retenir :

- En cas d'indépendance d'évènements, on calcule $\mathbb{P}(\cup A_n) = \sum \mathbb{P}(A_n)$ avec des familles finies ou dénombrables
- En cas d'indépendance d'évènements, on calcule $\mathbb{P}(\cap A_n) = \prod \mathbb{P}(A_n)$ avec des familles finies ; dans le cas général, c'est la formule des probailités composées qui s'applique

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰✰ *probabilités composées*

On fait parcourir à un rat un labyrinthe, dont l'extrémité donne accès à trois boîtes vides et une boîte contenant des friandises. Lorsqu'il accède à une boîte vide, une trappe le ramène à son point de départ et il revient choisir une nouvelle boîte.

1. On suppose que le rat mémorise parfaitement toutes les boîtes déjà visitées. Montrer qu'il fera au plus 4 passages dans le labyrinthe, et déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.
2. On suppose que le rat mémorise courte : il mémorise seulement la dernière boîte visitée. Déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.
3. On suppose que le rat oublie tout le passé. Déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.

Exercice 2 ✰ *probabilités totales*

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 6 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 3 blanches. On tire au hasard une boule dans l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 3

Soit $p \in]0,1[$ fixé.

On considère la répétition infinie d'expériences indépendantes de mêm loi de Bernoulli $b(p)$, et on note pour tout $n \geq 1$ $F_n =$« on tire face lors de la n-ème tentative. »

1. Eérire avec les symboles $\bigcup$ ou $\bigcup$ les évènements :
   (a) $A =$« on tire pile à chaque tentative »
   (b) $B =$« on tire au moins une fois pile. »
   (c) pour $N \geq 1$ entier fixé, $C_N =$« on tire pour la première fois pile lors de la N-ème tentative. »
2. Calculer les probabilités des évènements précédents, en fonction de p et $N \geq 1$ pour $\mathbb{P}(C_N)$.

Exercice 4 ✰ ✰ *formule de Bayes*

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

II. Exercices

Exercice 5 ☆☆

On tire avec remise un grand nombre de fois dans un sac contenant 5 pièces numérotées de 1 à 5. On note p_n la probabilité que la somme des n premiers tirages soit paire.

1. Calculer p_1. Exprimer p_n en fonction de p_{n-1} pour $n \geq 2$.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de $n \geq 1$.

Exercice 6 ☆ ☆

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $\mathbb{P}(N = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculez la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur ($G < 0$ si le joueur perd), donnez la loi de G.

Exercice 7 ☆☆

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $0 < \mathbf{P}(B) < 1$. Etablir que

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)\ \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}_{\bar{B}}(A)\ \mathbf{P}(\bar{B})$$

Exercice 8 ☆

Soit $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ définie par $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ pour $p \in]0,1[$ et $Y = f(X)$.

Déterminer l'image $Y(\Omega)$ et calculer les $\mathbb{P}(\{Y = k\})$ pour $k \in Y(\Omega)$

Exercice 9 ☆

Soit $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ définie par $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ et $Y = f(X)$.

Déterminer l'image $Y(\Omega)$ et calculer les $\mathbb{P}(\{Y = k\})$ pour $k \in Y(\Omega)$

Exercice 10 ☆☆

Déterminer la valeur de $a > 0$ pour que l'on puisse définir une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}[X = n] = \frac{a}{n(n+1)}$$

.

III. Exercices avancés

Exercice 11 ☆☆

On considère une infinité de tirages consécutifs (mutuellement indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, X_i vaut 1 si on obtient face lors du $i$ème lancer, 0 si on obtient pile lors du $i$ème lancer.

1. Que représente l'évènement $E_i = \{X_i = X_{i+1}\}$?
2. Que représente l'évènement $V_N = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} E_i$?
3. Calculer $\mathbf{P}(V_N)$, en fonction de $N \in \mathbb{N}^*$.
4. Justifier l'existence et calculer la limite $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}(V_N)$.

Exercice 12 ☆☆☆

Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour quelle valeur de k, la probabilité

$$p_k = \mathbf{P}(X = k)$$

est-elle maximale ?

Exercice 13 ☆☆☆ *Probabilités et opérations*

Soit n un entier strictement supérieur à 3 ; n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (évènement noté A) ?

Exercice 14 ☆☆☆ *Formule des probabilités composées, formule de Bayes*

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On réalise k tirages en remettant dans l'urne la boule tirée si elle est noire et en ne la remettant pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
2. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche durant les k tirages ?
4. On suppose que la deuxième boule tirée est noire. Quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

Exercice 15 ☆☆

Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ». Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 16 ☆ ☆ ☆

On considère une pièce de monnaie telle qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir face est égale à $2/3$. On lance cette pièce plusieurs fois de suite. Si on obtient face deux fois de suite, on dit que l'on a obtenu un doublé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : "on obtient un doublé pour la première fois à l'issue du $(n+1)$-ème lancer"et D_n l'évènement"on obtient au moins un doublé au cours des $n+1$ premiers lancers. " Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement A_n. On désigne par B l'évènement : "le premier lancer donne pile "et par C l'évènement : " le premier lancer donne face et le deuxième lancer donne pile . "

1. Calculer p_1, p_2, p_3
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbf{P}_B(A_{n+2}) = \mathbf{P}(A_{n+1})$ et $\mathbf{P}_C(A_{n+2}) = \mathbf{P}(A_n)$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$
4. Déterminer p_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
5. Calculer la probabilité de D_n .

Exercice 17 ☆☆☆☆ *Loi du 0-1*

Un singe tape aléatoirement sur un clavier. On note A l'évènement « Le message du singe contient la séquence de caractères $J'ai\ la\ banane$ »

Déterminer $\mathbb{P}(A)$ sur un clavier à 52 touches sans fonctions spéciales (majuscule, ctrl, Fn, etc...)

Notes

[1] correction : 1) bonne porte pour la première fois lors de la n ème tentative : $B_n = \overline{A_1} \cap \dots \overline{A_{n-1}} \cap A_n$, $\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_2) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_3) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_4) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{1}{4}$. 2) $\mathbf{P}(B_n) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3}$

3) N suit la loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{4})$.

[2] correction : Formule probabilités totales

[3] correction :

[4] correction :

1. Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a $\mathbf{P}(M) = 10^{-4}$, $\mathbf{P}_M(T) = 0,99$ et $\mathbf{P}(T|\bar{M}) = 10^{-3}$
   Par la formule des probabilités totales $\mathbf{P}(T) = P_M(T)P(M) + P_{\bar{M}}(T)P(\bar{M})$
   puis par la formule de Bayes $\mathbf{P}_T(M) = P(M \cap T)P(T) = P_M(T)P(M)P(T)$
   ce qui numériquement donne 9%.
   La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de $1/10000$ et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de $1/1000$.

[5] correction : $p_n = \frac{2}{5}p_{n-1} + \frac{3}{5}(1 - p_{n-1}) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_{n-1}$

point fixe $\frac{1}{2}$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ est géométrique $u_n = \frac{-1}{10}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$, $p_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2 \times 5^n}$

[8] correction :

[12] correction :

$p_k/p_{k-1} \geq 1 \iff k \leq (n+1)p$

En notant k_0 la partie entière de $(n+1)p$. La suite $(pk)_{0 \leq k \leq k_0}$ est croissante et la suite $(p_k)_{k_0 \leq k \leq n}$ est décroissante. Le maximum de p_k est donc atteint en $k = k_0$.

[15] correction :

1. On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$.
   Supposons connu p_n. Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales $p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$
   La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence $p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p$
   Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique à pour terme général $p_n = (1 + (2p-1)^{n-1})/2$
   Si $p \in]0,1[$ alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \to 1/2$.

[16] correction :

1. La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.
2. On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$

[17] correction : pour $1 \leq i \leq 14$, on note b_i la $i$ème lettre de la phrase et X_i la v.a. représentant le i ème caractère tapé

La probabilité de ne pas taper la phrase lors de 14 premiers caractères tapés est $p_{14} = \left(1 - \frac{1}{52^14}\right)$.

La probabilité de ne pas taper la phrase lors des n premiers blocs de 14 caractères tapés est $q_n = \left(1 - \frac{1}{52^14}\right)^n$. Cette quantité tend vers 0, et $1 \geq \mathbb{P}(A) \geq q_n \to 1$