

Méthodes à retenir :

- Pour déterminer si une matrice A est diagonalisable, on commence par calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ sous forme factorisée.
S'il est simplement scindé, alors A est diagonalisable sur \mathbb{K} et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Sinon A est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre λ de multiplicité $m_\lambda \geq 2$, la dimension d_λ du sous-espace propre E_λ (que l'on détermine en résolvant le système $AX = \lambda X$) vérifie $m_\lambda = d_\lambda$.
- Pour justifier qu'une matrice A n'est pas diagonalisable, il suffit de connaître une valeur propre λ pour laquelle $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) < m_\lambda$, où m_λ est la multiplicité de λ dans χ_A .
- Si χ_A n'est pas simplement scindé, A peut être non diagonalisable, comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$
- Si A est diagonalisable, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée dans une base de vecteurs propres adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda$ est la matrice diagonale par blocs $D_\lambda = \text{Diag}(\lambda I_{\dim(E_\lambda)})$. La matrice de changement de base P est obtenue en mettant en colonnes les vecteurs d'une base adaptée de vecteurs propres, et on a la relation $P^{-1}AP = D$.
- Il faut savoir réécrire matriciellement les relations de récurrence pour une ou plusieurs suites.
- Pour inverser une matrice inversible, il suffit de connaître un polynôme annulateur dont 0 n'est pas racine.
- Pour calculer les puissances d'une matrice A , il suffit de connaître un polynôme annulateur P et le reste R_n dans la division euclidienne de X^n par P avant d'évaluer en A .
- Pour trouver un polynôme annulateur de A , il suffit de considérer χ_A , d'après Cayley-Hamilton.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Déterminer les valeurs propres des matrices :

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 ☆

Dans chacun des cas de l'exercice précédent, déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres qui ont été obtenues. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3 ☆☆ diagonalisabilité sur \mathbb{C}

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{C} , sur \mathbb{R} ?

Exercice 4 ☆

Lorsque cela est possible diagonaliser dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

II. Exercices

Exercice 5 ☆☆ *vecteurs propres*

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrez que $v_1(-1; 1; 1)$ et $v_2(0; 1; 0)$ sont des vecteurs propres de f . A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
- Vérifier que $\text{Ker } f$ est une droite vectorielle.
- En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 6 ☆

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que M est inversible ssi $0 \notin Sp_{\mathbb{R}}(M)$.
- Montrer que M est inversible ssi M^2 est inversible.

Exercice 7 ☆☆

Soit E un e.v. de dimension finie $n = 2$ ou $n = 3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une symétrie ? D'une projection ?

Exercice 8 ☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = \text{tr}(A) = 1$.

Justifier que 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$, puis que A est diagonalisable sur \mathbb{R} , en précisant le spectre de A .

Exercice 9 ☆

Soit E un e.v. de dimension finie $n = 2$ ou $n = 3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une homothétie ?

Exercice 10 ☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $\text{tr}(A) = n$. Démontrer que A est diagonalisable et que $A = I_n$.

Exercice 11 ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{C} .
- Calculer $\text{tr}(A^n)$ en fonction de n .

Exercice 12 ☆☆

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

- Calculer le polynôme caractéristique χ_M de M .
- Vérifier que pour $P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, les vecteurs colonnes sont des vecteurs propres de M associés aux valeurs propres 0, 3, 5 dans cet ordre.
- En déduire l'expression de M^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 ☆☆☆

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

- Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M est $(X - 1)^3$.
- M peut-elle être diagonalisable ?
- Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $MV_1 = V_1$, $MV_2 = V_2$ et $MV_3 = -2V_1 + V_2 + V_3$
- En déduire que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- En déduire l'expression de M^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet une valeur propre $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Montrer que $\varphi : V \mapsto \bar{V}$ est une bijection de $E_\alpha = \text{Ker}(M - \alpha I_n)$ vers $E_{\bar{\alpha}} = \text{Ker}(M - \bar{\alpha} I_n)$

Exercice 15 ☆☆☆ *application de la réduction*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer les valeurs propres de A et diagonaliser A .
- Calculer A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.
- On considère les trois suites réelles u, v, w définies par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_n = -u_{n-1} + 2v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} - v_{n-1} - w_{n-1} \end{cases}$$
 Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n et des premiers termes u_0, v_0, w_0 .

Exercice 16

Soient f un endomorphisme de \mathbb{R}^n et A sa matrice représentative dans la base canonique. On suppose que A admet une valeur propre non réelle λ et on note $Z = X + iY$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (avec X et Y dans \mathbb{R}^n).

Montrer que X et Y sont non colinéaires. Montrer que $\text{Vect}(X, Y)$ est stable par f . On suppose que $A =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 stables par f .

Exercice 17 ☆☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p .

Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle. On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.

On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.

Exercice 18 ★★★

On considère l'endomorphisme $u : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

$$M \mapsto \frac{1}{3}(2M - {}^tM)$$

- Rechercher un polynôme annulateur de l'endomorphisme u .
- Montrer que u est diagonalisable.
- Calculer $\text{Tr } u$ et $\det u$.

III. Exercices avancés

Exercice 19 ★★★ matrice compagnon

Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & & & & a_1 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 20 ☆☆ CCP 2016, 2017

Soit $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et

$E = \{M(a, b, c) / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

- On note $J = M(0, 1, 0)$. Calculer J^2 . Exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I_3 , J et J^2 .
- E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension? Est-il stable par produit?
- La matrice J est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.
- La matrice M est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
- Montrer que M est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si $b = c$.
- On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a, b, c)$. Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur? Donner alors son image et son noyau.

Exercice 21 ★★★

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Montrer que M est trigonalisable mais non diagonalisable sur \mathbb{R} .
- Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $MV_1 = 0$, $MV_2 = V_2$ et $MV_3 = V_1 + 2V_2 + V_3$
- Soit $N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$
 - Démontrer que $NM = MN$
 - Démontrer que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(N) \subset \{-1, 0, 1\}$
 - Résoudre l'équation $N^2 = M$ d'inconnue $N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 22 ☆☆ récurrence linéaire d'ordre 3

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Déterminer une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$X_{n+1} = AX_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ où } X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbb{N}$$

- Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- En déduire Calculer u_p en fonction de p .

Exercice 23 ☆☆☆ diagonalisation simultanée

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes diagonalisables de E .

Notons $s = \text{Card}(Sp_{\mathbb{C}}(u))$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de u respectivement associés aux espaces propres $E_{\lambda_s, u}$.

On suppose que u et v commutent.

- Que dire de la somme $E_{\lambda_1, u} + \dots + E_{\lambda_s, u}$?
- Soit $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ Justifier que $E_{\lambda_j, u}$ est stable par v .
- On suppose dans la suite que les sous-espaces propres de u sont tous des droites vectorielles. Comparer s et n . En déduire que les $v|_{E_{\lambda_j, u}}$ sont diagonalisables. Conclure alors que u et v sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 24 ★★★

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + 2I_n$. Montrer que $\text{Det}(A) > 0$.

Exercice 25 ★★★

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_3$. Montrer que $\text{Tr}(A)$ est un entier.

Exercice 26 ☆☆☆ matrices de rang 1

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

- Montrer que $M^2 = \text{Tr}(M)M$.
- Déterminer le spectre de M .
- A quelle condition M est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?

Exercice 27 ☆☆☆ Mines-Ponts 2018

u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{C} . On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v est nilpotent.

- Montrer que $u + v$ est inversible ssi u est inversible.
- Montrer que si u est inversible, $\det(u + v) = \det(u)$.

Notes

³ correction :

⁸ correction : théorème du rang puis trace

¹² correction : $\chi_A = X(X-3)(X-5)$ en développant par rapport à C_3

¹³ correction : $\text{Ker}(M - I_3)$ a pour équation $x - 3y - z = 0$

Avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on calcule $-2V_1 + V_2$ et $MV_3 = -2V_1 + V_2 + V_3$ est équivalent à $x - 3y - z = 1$, on peut choisir $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

²¹ correction : $\chi_M = X(X-1)^2$, scindé donc trigonalisable

$v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ $v_3 = (0, 0, 1)$ complète en une base de \mathbb{R}^3 et convient car la 3ème colonne de M décompose ainsi $f(v_3) = (1, 0, 1) = v_3 + (1, 0, 0) = -2v_1 + v_2 + v_3$

$NV = \alpha V \Rightarrow N^2V = \alpha^2V = \lambda V$ donc $\alpha^2 = \lambda$ est v.p. de M .

Comme les sous-espace propres $E_0 = \text{Vect}(v_1)$ et $E_1 = \text{Vect}(v_2)$ de M sont stables par N , donc pour la matrices de passage P qui trigonalise M , on a

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

en mettant au carré, $a^2 = 0$, $b^2 = 1$ et $d(a+c) = 1$ et $e(b+c) = 2$ et $c^2 = 1$ ce qui fait deux matrices $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et son opposé, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou son opposé.}$$

²² correction : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$ via la matrice $u_n = \alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma 3^n$

²⁴ correction : $P = X^3 - X - 2$ est annulateur, il possède une racine réelle, unique par TVI après tableau de variations, $P = (X-a)(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ et le déterminant est $a^p |\alpha|^{2q} > 0$

²⁵ correction : $X(X-j)(X-\bar{j})$ est annulateur donc diagonalisable semblable à $(0_p, jI_q, \bar{j}I_q)$ avec $p+2q = n$.

La trace est donc $p(j+\bar{j}) = -p$ entière

²⁶ correction : colonnes colinéaires donc a une colonne non nul C et sa colonne $C_i = \alpha_i C$ pour i de 1 à n .

$$\text{On calcule } M^2 = \sum_k m_{ik} m_{kj} = \sum_k a_k c_i a_j c_k = \left(\sum_k c_k a_k \right) a_j c_i = \text{Tr}(M)M$$

$$P = X^2 - \text{Tr}(M)X \text{ est annulateur de } M \text{ donc } \text{Sp}(M) \subset \{0, \text{Tr}(M)\}$$

Si $\text{Tr}(M) \neq 0$ P est annulateur scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

Sinon, 0 est la seule valeur propre, elle ne peut pas être diagonalisable, sinon elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle, ce qui serait impossible car le rang ne vaudrait pas 1

Conclusion : $\text{Tr}(M) \neq 0$ ssi M est diagonalisable

²⁷ correction : 1. Si u inversible, pour $w = u^{-1}v$, on a $u + v = u(id + w)$, et comme $v^p = 0$, on a par commutation $w^p = 0$, donc $(id + w)$ inversible d'inverse $id - w + \dots + (-1)^{p-1}w^{p-1}$.

réciroquement, $u = u + v + (-v)$ et $-v$ est nilpotent.

2. on cotrigonalise.