# Table des matières

# Pré-requis

# Objectifs

# I. Dénombrabilité, sommabilité

## I.1 Définitions

**Définition 1.**

Un ensemble est dit (resp. au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (resp. une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ (resp. $I \subset \mathbb{N}$) avec des $x_i$ distincts.

**lemme 1.** *$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

On énumère en contre-diagonales □

**lemme 2.** *$\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

$n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{(n-1)}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$. □

Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

**Proposition 3** (Admis ).

on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$.

Pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de $I$, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big( \sum_{i\in I_n} x_i \Big)$.

**Définition 2.**

La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty[$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$.

**exemple 1.** $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+n)^2} = \pi^2/6$,

$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non sommable !

*Remarque* 1. En pratique, dans le cas positif, on peut découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

**Définition 3.**

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

## I.2 Calculs avec une famille sommable

**Proposition 4** (Admis).

Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

**Proposition 5** (Admis).

**En cas de sommabilité**, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes :

- croissance :$x_i \leq y_i,\ \forall i \in I \Rightarrow \sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i\in I} y_i$
- linéarité : $\sum_{i\in I} \lambda x_i + y_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$
- sommation par paquets : pour $I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n$, on a $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i\in I_n} x_i$
- théorème de Fubini : $\sum_{i,j\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} x_{i,j}$
- produit de deux sommes : $\sum_{i\in I} x_i \times \sum_{k\in K} y_k = \sum_{(i,k)\in I\times K} x_i y_k$

# II. Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

## II.1 Univers, événements

**Définition 4.**

Si $\Omega$ est un ensemble au plus dénombrable, appelé **univers**, on appelle **tribu** sur $\Omega$ une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de $\Omega$ telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'**évènement contraire** $\overline{A} = \Omega \setminus A$ appartient à $\mathcal{A}$,
3. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la **réunion** $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

On dit alors que les éléments de la tribu $\mathcal{A}$ sont les **évènements**.
On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**

**exemple 2.** $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$ est une tibu sur $\Omega = \{P, F\}$. Cela peut servir à modéliser un jet de pièce à pile ou face.

**Définition 5** (Evènement)**.**

On appelle **évènements** tous les éléments d'une tribu $\mathcal{A}$ sur $\Omega$.

**Définition 6** (Evènement contraire)**.**

Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est appelé **évènement contraire** de $A$ (complémentaire dans $\Omega$).

**Définition 7** ( union $\cup$, OU ensembliste)**.**

Pour $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on note l'évènement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ défini par

$\forall \omega \in \Omega,\ \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n)$

Ainsi la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation d'au moins un évènement $A_n$, pour au moins une valeur $n \in \mathbb{N}$.

**Définition 8** ( intersection $\cap$, ET ensembliste)**.**

Pour $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on note l'évènement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ défini par

$\forall \omega \in \Omega,\ \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n)$

Ainsi l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation de tous les évènements $A_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

*Remarque* 2. L'univers $\Omega$ n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements.

**exemple 3.** Ecrire l'évènement réussir lors d'une tentative paire à l'aide des $(F_i)_{i\geq 1}$ dans une succession de pile ou face : $\bigcup_{p=1}^{+\infty} F_{2p}$

**Proposition 6.**

La tribu est par définition stable par réunion finie ou dénombrable et par passage au complémentaire. Elle est donc également stable par intersection finie ou dénombrable.

*Remarque* 3. $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n$ et

$\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n$

## II.2 Loi de Probabilité

**Définition 9** (Evènements incompatibles)**.**

Deux évènements $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$ sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

**Définition 10** (loi de probabilité)**.**

Si $\Omega$ est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur $\Omega$, on appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
2. [$\sigma$-additivité] pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux **incompatibles**,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

**Définition 11.**

On appelle **espace probabilisé** un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

**Définition 12.**

Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, on appelle probabilité de $A$ le nombre $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ \omega \in A\})$

## II.3 Calculs de probabilités d'évènements

**Proposition 7** (passage au complémentaire)**.**

Pour tout $A$ de $\mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

**Proposition 8** (réunion)**.**

Pour tous $A, B$ de $\mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

**Proposition 9** (Evènements incompatibles)**.**

Si deux évènements $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$ sont **incompatibles** alors $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Cela est même valable pour les réuninons dénombrables, c.f. $\sigma$-additivité.

**Proposition 10** (croissance)**.**

Si deux évènements $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$ et si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

**Proposition 11.**

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

**Proposition 12** (Continuité croissante :).

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout $n$, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

*démonstration :*

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $A_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. La suite $(\mathbf{P}(A_N))_N$ est donc croissante, et majorée par 1 donc converge.

**Proposition 13** (Continuité décroissante :).

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout $n$, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

*démonstration :* On passe au complémentaire $1-\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n^C)$ converge vers $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n^C\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

*Remarque* 4. Application, pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone) :
$\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\geq 0}$ est croissante, donc la limite suivante existe $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$

De même $\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\geq 0}$ est décroissante, donc $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

**Proposition 14** (Sous additivité :).

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

*démonstration :* C'est vrai pour les sommes finies, donc à la limite lorsqu'elles existent dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

*Remarque* 5. En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$

## II.4 Conditionnement et indépendance

### 4.a) Probabilités conditionnelles

**Définition 13.**

Si $A$ et $B$ sont deux événements tels que $\mathbf{P}(B) > 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de $A$ **sachant** $B$ le réel

$$\boxed{\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}$$

Notation $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$.

**Proposition 15.**

L'application $\mathbf{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

*démonstration* : on a $\mathbf{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1$
La propriété sur les réunions dénombrables résulte directement de celle de $\mathbf{P}$. $\square$

**Proposition 16** (Formule des probabilités composées)**.**

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. Alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

*démonstration :* par récurrence sur $n \geq 2$

**exemple 4.** Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que les deux premières soient blanches et que la troisième soit noire ?

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) = \mathbf{P}(B_1)\ \mathbf{P}_{B_1}(B_2)\ \mathbf{P}_{B_2}(\overline{B_3}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

*Remarque* 6. On adopte la convention $\mathbf{P}(B \mid A_n)\mathbf{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

### 4.b) Indépendance d'évènements

**Définition 14** (Indépendance de deux événements)**.**

Deux évènements $A$ et $B$ sont dits **indépendants** si $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)}$.

*Remarque* 7. Pour de tels évènements, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)$ : la réalisation éventuelle de $B$ n'influe pas sur celle de $A$.

**Proposition 17.**

Si $\mathbf{P}(B) > 0$, l'indépendance de $A$ et $B$ équivaut à $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

*démonstration* $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \iff \mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} \iff \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$ □

**exemple 5.** Jeux de dés

**Définition 15** (Indépendance d'une famille finie d'événements)**.**

Des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie $J$ non vide de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

*Remarque* 8. L'indépendance des événements $A_i$ deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n \geqslant 3$ !

**Définition 16** (Indépendance 2 à 2 d'une famille finie d'événements)**.**

Des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **deux à deux indépendants** si
pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}(A_j)$

**exemple 6.** évènement A : pile au premier lancer
évènement B : pile au deuxième lancer
évènement C : les deux lancers donnent le même résultat
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 0,5$
$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(C \cap A) = 0,25$ les événements sont deux à deux indépendants.
$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0,25 \neq 0,5^3$. ils ne sont pas mutuellement indépendants

**exemple 7.** Une urne contient quatre jetons : un vert, un blanc, un rouge et un tricolore vert-blanc-rouge. On en tire un au hasard. On considère les trois évènements :
$V = \{\text{le jeton tiré contient du vert}\}$ $B = \{\text{le jeton tiré contient du blanc}\}$ $R = \{\text{le jeton tiré contient du rouge}\}$
On a $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(R) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
$\mathbf{P}(V \cap B) = \mathbf{P}(tricolore) = \dfrac{1}{4} = \mathbf{P}(V)\mathbf{P}(B)$, donc $V$ et $B$ sont deux à deux indépendants, et idem pour $B$ et $R$, ainsi que $V$ et $R$.
Par ailleurs, $\mathbf{P}((V \cap B) \cap R)) = \dfrac{1}{4} \neq \mathbf{P}(V \cap B)\mathbf{P}(R) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$
Comme, $\mathbf{P}_{V \cap B}(R) = 1 \neq \mathbf{P}(R)$, car $V \cap B = \{tricolore\}$, la connaissance de la realisation simultanée de $V$ et $C$ modifie notre information sur $R$.
La notion d'indépendance deux à deux n'est donc pas suffisante pour traduire l'idée intuitive d'indépendance de plusieurs événements. Ceci motive la définition suivante.

**Proposition 18.**

Si $A$ et $B$ sont indépendants, $A$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

**Proposition 19.**

Si $B$ est indépendant des $(A_n)$, alors il l'est des $(\overline{A_n})$.

## II.5 Systèmes complets d'évènements, probabilités totales

**Définition 17** (Evénement presque sûr)**.**

On appelle évènement presque-sûr un évènement $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) = 1$

exemple $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ la réalisation d'un face dans la répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

**Définition 18** (Evénement négligeable)**.**

On appelle évènement négligeable un évènement $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) = 0$

exemple $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ la réalisation systématique de tirages face dans la répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

**Définition 19** (Système complet dénombrable d'événements)**.**

Une famille dénombrable $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est dite **système complet dénombrable d'événements si :** $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ **et,** $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$

*Remarque* 9. On peut partitionner $\Omega$ en une réunion dénombrable d'évènements disjoints deux à deux.

**Proposition 20** (Formule des probabilités totales)**.**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum_n \mathbf{P}(B \cap A_n)$ converge et

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)$$

*démonstration :*

On a $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$ est une réunion d'évènements deux à deux incompatibles.

Donc par définition de $\mathbf{P}$, on a $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n)$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}(A_n \cap B) = \mathbf{P}_{A_n}(B)\mathbf{P}(A_n)$, d'où le résultat. □

**exemple 8.** On dispose de 3 urnes $U_1$, $U_2$, $U_3$, chacune contient 10 boules ; parmi elles, $U_1$ contient 1 blanche, $U_2$ contient 2 blanches, et $U_3$ contient 6 blanches. On tire au hasard une boule dans l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

On note $B$ l'événement "on obtient une boule blanche" et $A_i$ l'événement "on tire la boule dans l'urne $U_i$". $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme un système complet d'événements, et : $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}_{A_3}(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$

*Remarque* 10. Convention $\mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

**Définition 20** (Système quasi-complet dénombrable d'événements)**.**

Une famille dénombrable $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est dite **système quasi-complet dénombrable d'événements si les** $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ **sont deux à deux incompatibles et si** $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$**.**

*Remarque* 11. la formule des probabilités totales reste vraie pour un système quasi-complet dévènements c'est à dire pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1$.

**Proposition 21** (Formule de Bayes)**.**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (ou quasi-complet), et $B$ un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$.
Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\ \mathbf{P}(A_k)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\ \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)}$$

*démonstration :* Par définition, $\mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}(A_k \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$

or $\mathbf{P}(A_k \cap B) = \mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)$

Par la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)$

D'où le résultat en faisant le quotient. □

**exemple 9.** Test viral. Un laboratoire propose un test de dépistage du virus Ebola.

Des études randomisées ont permis d'établir les statistiques suivantes :
- si le patient est sain, le test est négatif dans 99.8
- si le patient est malade, le test est positif dans 99.9

On sait d'autre part qu'il y a un animal malade sur 10000. Peut-on avoir confiance en ce test ? Pour cela, on déterminera :
a) la probabilité que le patient soit malade, sachant que le test est positif ;
b) la probabilité que le patient soit sain, sachant que le test est négatif.

a) $(M, \overline{M})$ est un système complet d'évènements. Bayes

$$\mathbf{P}_P(M) = \frac{\mathbf{P}_M(P)\ \mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}_M(P)\ \mathbf{P}(M) + \mathbf{P}_{\overline{M}}(P)\ \mathbf{P}(\overline{M})} = \frac{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000}}{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000} + \frac{1}{500}\frac{9999}{10000}} = \frac{111}{2333} \approx 4,76\%$$

b) $(M, \overline{M})$ est un système complet d'évènements. Bayes

$$\mathbf{P}_{\overline{P}}(\overline{M}) = \frac{\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{P})\ \mathbf{P}(\overline{M})}{\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{P})\ \mathbf{P}(\overline{M}) + \mathbf{P}_M(\overline{P})\ \mathbf{P}(M)} = \frac{\frac{499}{500}\frac{9999}{10000}}{\frac{499}{500}\frac{9999}{10000} + \frac{1}{1000}\frac{1}{10000}} = \frac{9979002}{997903} \approx 99.99\%$$

Si le test est positif, la probabilité que le patient soit vraiment malade est très faible. Avec ce test, les patients déclarés malades sont en majorité sains, on ne peut donc pas avoir confiance en ce test pour déterminer si un patient est malade.

Par contre, si un patient est déclaré sain, on peut être sûr qu'il l'est avec une probabilité de 99,99%. On peut donc avoir confiance en ce test pour déterminer si un patient est sain.

# III. Variables aléatoires

## III.1 Variables aléatoires discrètes

### 1.a) Définition

**Définition 21** (variable aléatoire discrète à valeurs réelles)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
Une variable aléatoire discrète réelle $X$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\Omega$, telle que : i) $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ii) pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{A}$.

*Remarque* 12. L'univers $\Omega$ n'est en général pas explicité.

*Remarque* 13. On peut même considérer des variables aléatoires à valeurs dans $F$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Par exemple, la variable alétaoire à valeurs dans $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ valant $X(0) = I_2$ avec probbilité $X(1) = -2I_2$, sur l'univers $\omega = \{0, 1\}$

**Notation 1.** *Pour* $x \in X(\Omega)$*, on note* $(X = x)$ *ou* $\boxed{\{X = x\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\}} = X^{-1}(\{x\})$

**Notation 2.** *Pour* $A \in \mathcal{A}$*, on note* $(X \in A)$ *ou* $\boxed{\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in A\}} = X^{-1}(\{A\})$

**Notation 3.** *Pour* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*, et* $x \in \mathbb{R}$*, on note* $(X \geqslant x) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \geq x\} = X^{-1}(\{[x, +\infty[\})$

### 1.b) Loi d'une variable aléatoire discrète

**Définition 22** (Loi d'une variable aléatoire discrète)**.**

Si $X$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **la loi de** $X$ est la donnée des $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})$ pour $k \in X(\Omega)$.
On la note $\mathbf{P}_X$, et on peut la définir comme suit :

$$\forall k \in X(\Omega),\ \mathbf{P}_X(\{k\}) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\}) = \mathbf{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mathbf{P}(\{X = k\})$$

*Remarque* 14. $\mathbf{P}_X$ est une loi de probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

**exemple 10.** Pour $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la loi uniforme $\mathbf{P}$ et de la tribu $\mathcal{A}$ contenant tous les singletons "couples" $\{(\omega_1, \omega_2)\}$, $S : (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2$

La loi $\mathbf{P}_S$ de $S$ est donnée par :$\forall k \in [\![2, 12]\!],\ \mathbf{P}_S(k) = \dfrac{\#\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2;\ i + j = k\}}{36}$

*Remarque* 15 (**IMPORTANT**). La loi de probabilité $P_X$ est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Cette distributin est dénombrable, on peut lui associer une suite $p_n$ de valeurs de probabilités en posant $X(\Omega) = \{x_n; n \in I\}$ et $p_n = \mathbf{P}(X = x_n)$ pour des $x_n$ deux à deux distincts.

On a alors $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{n \in I} p_n$

## III.2 Lois usuelles

### 2.a) rappel : loi de Bernoulli de paramètre $p$

**Définition 23.**

Soit $p \in ]0, 1[$. On dit que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$, ce que l'on note $X \sim b(p)$ si :
$X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si $\mathbf{P}(X = 0) = (1 - p)$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$

Expérience aléatoire : On tire une pièce de monnaie (équilibrée ou pipée), avec 1 le succès Face, 0 l'échec Pile.

### 2.b) rappel : loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$

**Définition 24.**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On dit que $X$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots N\}$ ce que l'on note $X \sim Unif([\![1, N]\!])$ si :

$X(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et si $\mathbf{P}(X = j) = \dfrac{1}{N},\ \forall j \in [\![1, N]\!]$.

Expérience aléatoire : tirage équiprobable dans une urne contenant $N$ jetons numérotés de 1 à $N$.

### 2.c) rappel : loi binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$

**Définition 25.**

Soient $p \in ]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On dit que $X$ suit la loi binomiale de paramètres $N$ et $p$, ce que l'on note $X \sim B(N,p)$ si :
$X(\Omega) = [\![0,N]\!]$ et si $\mathbf{P}(X=k) = \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k, \ \forall k \in [\![0,N]\!]$

Expérience aléatoire : On compte les succès (Face) en $N$ tentatives simultanées et indépendantes de lancers de pièce, en notant 1 le succès Face de probabilité $p$, 0 l'échec Pile de probabilité $1-p$.

### 2.d) Loi Géométrique de paramètre $p$

**Définition 26.**

Soit $p \in ]0,1[$. On dit que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, ce que l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si :
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$

*Remarque* 16. $1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p$

*Remarque* 17. Interprétation en termes de répétition : $[X=k]$ représente la réalisation d'un premier succès lors de la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli de même loi $b(p)$.

Expérience aléatoire : On répète des tirages successifs indépendants d'une pièce, en notant 1 le succès Face de probabilité $p$, 0 l'échec Pile de probabilité $1-p$, jusqu'à obtenir un premier succès (Face), et on compte le nombre de tirages nécessaires.

**Proposition 22.**

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{P}(X>k) = (1-p)^k, \ \forall k \geq 1$.

dém $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} = p\frac{(1-p)^k-}{1-(1-p)} = (1-p)^k$

### 2.e) Loi de Poisson de paramètre $\lambda$

**Définition 27.**

Soit $\lambda > 0$. On dit que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, ce que l'on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si :
$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbf{P}(X=k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

*Remarque* 18. $1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

*Remarque* 19. Interprétation en termes d'événements rares : si on considère une expérience répétée un très grand nombre de fois $N$, avec une probabilité de succès $p_N$ faible et $X$ la variable comptant le nombre de succès, alors $X$ suit approximativement la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $Np_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda$.

C'est ce qu'on appelle l'approximation binomiale-Poisson (exercice)

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n}) \ \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(np)^k}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n}) \ \times e^{n\ln(1-np/n)} \ \times e^{-k\ln(1-np/n)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\times 1\times e^{-\lambda}\times 1 \qquad \square$$

**exemple 11.** Suite à une vaccination contre le paludisme, dans une population à risque, on estime à 2%, compte tenu du délai d'immunisation, la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. Quelle est la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de 100 habitants tous récemment vaccinés, plus d'une personne malade ? (on supposera l'indépendance des éventualités).

Compte tenu des hypothèses, le nombre de malades est ici régi par une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$. On a $np = 2$ et les conditions d'approximation $(np(1-p) \leq 10)$ par une loi de Poisson sont réalisées, en posant $\lambda = np = 2$. Soit $m$ la probabilité cherchée ; avec les notations ci-dessus, on a :

$\mathbf{P}(X=k) = e^{-2\times 2k}/k!$ , donc $1-m \approx \mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(X=1) = 0,406$ , soit : $m \approx 0,6$

L'application (peu pratique) de la loi binomiale aurait fourni $1-m = (0,98)100 + 2(0,98)99 \approx 0,403$. Soit $m \approx 0,597$. L'approximation est donc ici excellente.

# IV. Espérance

## IV.1 Espérance

**Définition 28.**

La variable aléatoire réelle discrète $X$ à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable est dite d'**espérance finie** si la famille $(x\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Si tel est la cas, on appelle **espérance** de $X$, notée $\mathbb{E}[X]$ la valeur réelle définie par : $\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x)}$.

*Remarque* 20. Pour $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,
$\sum_{n\geq 0} x_n\mathbf{P}(X=x_n)$ CV ssi $\sum_{n\geq 0}|x_n|\mathbf{P}(X=x_n)$ ssi $(x\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ sommable.

**Proposition 23.**

Pour $X$ de loi $\mathcal{G}(p)$, on a : $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$
Pour $Y$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a : $\mathbb{E}[Y] = \lambda$

*dém :*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors par dérivation terme à terme sur $]-1,1[$ :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right)\right]_{x=1-p} = p\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]_{x=1-p} = p\left[\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right]_{x=1-p} = \frac{p}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}.$$

Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors par changement d'indice :

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\lambda^{k-1}\lambda e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \boxed{\lambda}.$$

□

## IV.2 Loi image, théorème du transfert

**Notation 4.** *On note $X \sim Y$ lorsque les variables $X$ et $Y$ suivent la même loi.*

**Définition 29** (Loi d'une variable aléatoire image)**.**

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application, et si $X$ est une variable alétoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors on définit une variable aléatoire notée $f(X)$ en posant :

$$\forall \omega \in \Omega, f(X)(\omega) = f(X(\omega))$$

**exemple 12.** $X \sim b(p)$, $f : x \mapsto 2x-1$, on vérifie que $f(X)(\Omega) = \{-1, 1\}$, $\mathbf{P}(f(X) = 1) = \mathbf{P}(X = 1) = p$ et $\mathbf{P}(f(X) = -1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1-p$

**Proposition 24.**

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

**Théorème 25** (Théorème du transfert :)**.**

si $X$ est une variable aléatoire et $f$ une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de $X$, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n).$$

*Démonstration hors programme*, idée : pour une fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la formule est vraie. Puis toute fonction $f$ continue sur un segment est limite uniforme d'une combinaison linéaire de fonctions indicatrices...

## IV.3 Propriétés de l'espérance

**Proposition 26** (Linéarité de l'espérance).

Pour tous $X, Y$ variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\, \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

*Démonstration non exigible.*

idée : immédiat pour des variables à espaces de valeurs finis, se généralise aux v.a. discrètes quelconques.

en notant $\{(\omega_k)_{1\leq k\leq K}\}$ un système complet d'évènements tel que $p_k = \mathbf{P}_{(X,Y)}(x_k, y_k) = \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_k, y_k)\})$ avec $X(\Omega) = \{x_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ de cardinal $N \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints) et $Y(\Omega) = \{y_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ de cardinal $M \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints),

$$\sum_{k=1}^{N}(\lambda x_k + y_k)p_k = \sum_{k=1}^{N}\lambda x_k p_k + \sum_{k=1}^{N} y_k p_k$$

idée cas général : On note $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_i, y_j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire couple $(X,Y)$, avec $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ , et on note $p_n = \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $X$ est d'espérance finie, la série $\displaystyle\sum_i x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\})$ converge absolument, et sa somme vaut, en utilisant les lois marginales, et le théorème de transfert pour $f : (x,y) \longmapsto x$ :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f((x_i, y_j))\mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\})$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(C_n)\ \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$$

De même pour $g : (x,y) \longmapsto y$ : $\displaystyle\mathbb{E}[Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\ \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda f(C_n) + g(C_n)| \leq |\lambda|\ |f(C_n)| + |g(C_n)|$,

la série $\displaystyle\sum \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda f(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$$

Donc d'après le théorème de transfert $\lambda X + Y = \lambda f((X,Y)) + g((X,Y))$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\, \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \square$$

**Proposition 27.**

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que $XY$ admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

*Démonstration hors programme*

idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple $(X,Y)$.

Remarque : réciproque fausse pour $X = Y$ de loi $b(p)$ par exemple

**Proposition 28.**

Si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$.

*dém :* on découpe et on intervertit les sommes convergentes

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{k} \mathbf{P}(X=k) \right)$$

$$\underset{\text{somme série positive}}{=} \sum_{1 \leq n \leq k}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) \underset{interversion}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n).\ \square$$

# V. Variance

## V.1 Définition

**Proposition 29.**

Soit $X$ v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si la variable aléatoire $X^2$ est d'espérance finie, alors $X$ est elle-même d'espérance finie.
i.e. : Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ existe.

*idée Démonstration :*

$$\sum_{n=0}^{N} x_n p_n = \sum_{n=0}^{N} x_n \sqrt{p_n} \times \sqrt{p_n} \underset{C.-S.}{\leq} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} x_n^2 \sqrt{p_n}^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} \sqrt{p_n}^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 p_n}\ \square$$

marche encore si $X$ discrète quelconque...

**Proposition 30.**

Soit $X$ v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $m = \mathbb{E}[X]$ existe et $\mathbb{E}[(X-m)^2]$.
De plus $\mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

*Démonstration :* $(X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$.

$\mathbb{E}[m^2] = \sum_{n=0}^{+\infty} m^2 p_n = m^2$ existe par transfert via $f : x \longmapsto m^2 x^0$ ou via v.a.r. constante.

DOnc par linéarité $\mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[m^2] = \mathbb{E}[X^2] - m^2$. $\square$ (formule de Koenig).

**Définition 30.**

Si $X^2$ est d'espérance finie, la **variance** de $X$ est le réel $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$.

**Proposition 31.**

Soit $X$ v.a. à valeurs discrète admettant une variance et une espérance. Alors $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$

*idée Démonstration :* linéarité

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + (\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \quad \square$$

**Proposition 32.**

Pour $X$ de loi $\mathcal{G}(p)$, on a : $\mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$

Pour $Y$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a : $\mathbb{V}[Y] = \lambda$

*dém :* cf ch 14 : séries génératrices

$\square$

## V.2 Propriétés de la variance

**Proposition 33.**

Pour $a$ et $b$ réels et $X$ une variable aléatoire réelle, on a $\boxed{\mathbb{V}(aX + b) = a^2\, \mathbb{V}(X)}$

*démonstration :* Calcul direct :

$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$, donc $\mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2) = \mathbb{E}((a(X - \mathbb{E}(X)))^2) = a^2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$. $\square$

**exemple 13.** Pour $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ de loi $\mathcal{B}(N, p)$, somme de variables de loi $b(p)$ indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_N) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{V}(X_k) = Np(1-p)$$

**exemple 14.** Pour $S_N$ de loi $\mathcal{B}(N, p)$, $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{N} S_N\right) = \dfrac{1}{N^2}\mathbb{V}(S_N) = \dfrac{p(1-p)}{N}$

## V.3 Variance d'une somme, covariance

**Proposition 34.**

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes admettant des variances, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]$.

*Démonstration :* $((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))^2 = (X-\mathbb{E}(X))^2 + 2(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)) + (Y-\mathbb{E}(Y))^2$

**Définition 31** (Covariance)**.**

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

**Proposition 35.**

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes admettant des variances, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

# VI. Couples de variables aléatoires discrètes

## VI.1 Couple

**Définition 32** (Couple de variables aléatoires discrètes)**.**

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, l'application **couple** notée $(X,Y)$ définie par $(X,Y) : \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire sur $\Omega$, à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

**Définition 33.**

Etant données $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, leur **loi conjointe** est la loi de la variable aléatoire $(X,Y)$, définie par :

$$\forall x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ \mathbf{P}(\{(X,Y)=(x,y)\}) = \mathbf{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

Les lois $\mathbf{P}_X$ de $X$ et $\mathbf{P}_Y$ de $Y$ sont appelées les **lois marginales** de $(X,Y)$.

**exemple 15.** En pratique, on fait un tableau à double entrée donnant les $\mathbf{P}(\{X=x_i\} \cap \{Y=y_j\})$ :

| $Y \setminus X$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{P}_X$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_0$ | 1/16 | 2/16 | 3/16 | 6/16 |
| $y_1$ | 1/16 | 7/16 | 2/16 | 10/16 |
| $\mathbf{P}_Y$ | 2/16 | 9/16 | 5/16 | |

*Remarque* 21. Attention : la données des marginales ne donne pas la loi du couple !
contre-exemple : $(X, Y)$ suit la loi uniforme sur $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$
et $(X', Y')$ donnée par $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0,0) = 1/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1,0) = 3/8$ $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0,1) = 3/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1,1) = 1/8$
ont les mêmes marginales, mais ne sont pas égales !!!
En revanche, $\mathbf{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y, X = x)$ : la loi du couple donne les marginales.

**Définition 34.**

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(\{X = x\}) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = x\}$** la loi de probabilité définie pour les $y \in Y(\Omega)$ par $\mathbf{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$.

## VI.2 Indépendance de deux variables

**Définition 35** (Variables indépendantes)**.**

Deux variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ définies sur $\Omega$ sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
Si tel est le cas, on note $\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y}$ le fait que $X$ et $Y$ sont indépendantes.

$\boxed{\text{Notation : } X \perp\!\!\!\perp Y}$

*Remarque* 22. De façon équivalente, la distribution de probabilités de $(X, Y)$ est donnée par :
$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

**Définition 36** (alternative)**.**

Deux variables aléatoires $X$ et $Y$ discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sont dites **indépendantes** si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(\{X = x, Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

*Remarque* 23. on note $\{X = x, Y = y\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$

**Proposition 36.**

Soient $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires.
Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

## VI.3 Covariance, corrélation

En cas d'indépendance, la covariance est nulle.

**Proposition 37.**

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des variances, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

*Démonstration*

**Définition 37** (coefficient de corrélation)**.**

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\ \mathbb{V}(Y)}}$$

*Remarque* 24. En cas d'indépendance, la corrélation vaut 0.

En cas de ralation $Y = aX + b$, la corrélation vaut 1 ou $-1$.

**Définition 38.**

Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

**Proposition 38** (Cauchy-Schwarz)**.**

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)\ \mathbb{V}(Y)}$$

$$-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$$

*démonstration :* ( Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\mathbb{V}(tX+Y) = t^2\mathbb{V}(X) + 2t\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$, trinôme dont le discriminant ne change pas de signe.

Dans le cas de variables à valeurs dans un ensemble fini, il y a égalité ssi $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ sont colinéaires, i.e. ssi $\exists\ a;\ a(X - \mathbb{E}(X)) = Y - \mathbb{E}(Y)$ ssi $\exists\ a, b;\ aX + b = Y$ □

*Remarque* 25. Régression linéaire : si $|\rho| = 1$, alors égalité dans Cauchy-Schwarz : $(X - \mathbb{E}(X))$ et $(Y - \mathbb{E}(Y))$ sont colinéaires, donc il existe $a, b$ tels que $Y = aX + b$.

Sinon, on pose $\Xi = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}$

on cherche $\hat{a}, \hat{b}$ tels que $\left\| \Gamma - \hat{a}\Xi + \hat{b}(1\dots1) \right\|_2^2 = \left\| M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \Gamma \right\|_2^2$ soit minimale, avec $M = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

OK pour $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ le projeté de $\Gamma$ sur $\mathrm{Im}(M)$.

# VII. Suites de variables aléatoires

## VII.1 Indépendance d'une famille de variables

**Définition 39** (Variables mutuellement indépendantes)**.**

Des variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$ sont dites **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}X_i(\Omega),\ \mathbf{P}((X_i)_{1\le i\le n}=(x_i)_{1\le i\le n})=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i=x_i)$$

**Définition 40** (Suite de variables aléatoires indépendantes)**.**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **(mutuellement) indépendantes** si
pour toute partie $I$ finie de $\mathbb{N}$, les $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

**Définition 41** (Suite de variables aléatoires indépendantes)**.**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **deux à deux indépendantes** si
$\forall i\neq j$, $X_i$ et $X_j$ sont indépendantes.

**exemple 16.** Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

On note $N\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$, et $X_1,\dots,X_N$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $b(p)$.

Alors $S_N=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(N,p)$.

En effet, $S_N$ est à valeurs dans $[\![0,N]\!]$, et pour tout $k\in[\![0,N]\!]$ on a :

$$\mathbf{P}(\{S_N=k\})=\mathbf{P}(\{\sum_{i=1}^{N}X_i=k\})=\mathbf{P}(\bigcup_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i=k}\{(X_1,\dots,X_N)=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)\})\underset{evnmts\ incompatibles}{=}$$

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i=k}\mathbf{P}(\{(X_1,\dots,X_N)=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)\})\underset{indep.}{=}\sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i=k}p^k(1-p)^{N-k}=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$$

**exemple 17.** Attention : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse !

Contre-exemple : $X$ et $Y$ indépendantes de loi $b(1/2)$, $Z=(2X-1)(2Y-1)$.

$\mathbf{P}(Z=1)=\mathbf{P}(X=1,Y=1)+\mathbf{P}(X=0,Y=0)=1/2$ $\mathbf{P}(Z=-1)=\mathbf{P}(X=0,Y=1)+\mathbf{P}(X=1,Y=0)=1/2$

$\mathbf{P}(Z=1,X=0)=\mathbf{P}(X=0,Y=0)=1/4=\mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)$ , $\mathbf{P}(Z=1,X=1)=\mathbf{P}(X=1,Y=1)=1/4=\mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=1)$ d'où l'indépendance 2 à 2.

En revanche, $\mathbf{P}(Z=1,X=0,Y=1)=0\neq\mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)$

**Définition 42** (Variables i.i.d.)**.**

Une suite de variables aléatoires $(x_n)$ est constituée de variables indépendantes identiquement distribuées si :
- les $X_n$ sont (mutuellement) indépendantes
- Les $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ ont toutes la même loi de probabilité.

**exemple 18.** Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

## VII.2 Coalitions

**Proposition 39** (lemme des coalitions)**.**

si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

NOUVEAU Programme PC 2022 :

# Variables aléatoires discrètes

*On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :*

— *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*

— *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*

— *les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.*

*Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.*

*La notion de variable à densité est hors programme.*

*La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.*

## A - Ensembles dénombrables, familles sommables

*Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.*

*Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.*

— Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des $x_i$ distincts.

Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

— En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de $I$, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

— Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

## B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

| Contenus | Capacités & commentaires |
| --- | --- |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
| --- | --- |
| **a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes** | |
| Univers $\Omega$, tribu $\mathcal{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. | On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$. |
| Événements. | Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. |
| Une variable aléatoire discrète $X$ est une application définie sur $\Omega$, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement. | L'univers $\Omega$ n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque $X$ est à valeurs réelles. |
| **b) Probabilité** | |
| Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, $\sigma$-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité. | Notation $P(A)$. |
| Continuité croissante, continuité décroissante. | Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand $n$ tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$ |
| Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. | En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$ |
| Événement presque sûr, événement négligeable. | Système quasi-complet d'événements. |
| **c) Probabilités conditionnelles** | |
| Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| L'application $P_B$ définit une probabilité. | |
| Formule des probabilités composées. | |
| Formule des probabilités totales. | Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n)=0$ lorsque $P(A_n)=0$. |
| Formule de Bayes. | |

## d) Loi d'une variable aléatoire discrète

| | |
|---|---|
| Loi $P_X$ d'une variable aléatoire discrète. | La probabilité $P_X$ est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X\sim Y$ lorsque les variables $X$ et $Y$ suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation. |
| Variable aléatoire $f(X)$. Si $X\sim Y$ alors $f(X)\sim f(Y)$. | On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire. |
| Variable géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$ : $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$ | Notation $X\sim\mathcal{G}(p)$. Relation $P(X>k)=(1-p)^k$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p$. |
| Variable de Poisson de paramètre $\lambda>0$ : $$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$ | Notation $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares. |
| Couple de variables aléatoires discrètes. | Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x,Y=y)$. |
| Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de $Y$ sachant un événement $A$. | Extension aux $n$-uplets de variables aléatoires. |

## e) Événements indépendants

| | |
|---|---|
| Indépendance de deux événements. | Si $P(B)>0$, l'indépendance de $A$ et $B$ équivaut à $$P(A\|B)=P(A).$$ |
| Indépendance d'une famille finie d'événements. | L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance. |
| Si $A$ et $B$ sont indépendants, $A$ et $\overline{B}$ le sont aussi. | Extension au cas de $n$ événements. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| **f) Variables aléatoires indépendantes** | |
| Deux variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ définies sur $\Omega$ sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. | Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.<br>De façon équivalente, la distribution de probabilités de $(X, Y)$ est donnée par $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.<br>Extension au cas de $n$ variables aléatoires. |
| Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d. | On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.<br>Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli. |
| Fonctions de variables indépendantes :<br>si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. | Extension au cas de plus de deux variables aléatoires. |
| Lemme des coalitions :<br>si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi. | Extension au cas de plus de deux coalitions. |

## C - Espérance et variance

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe** | |
| Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$ | On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$. |
| Variable aléatoire $X$ à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de $X$. | $X$ est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de $X$.<br>Variable centrée. |
| Pour $X$ variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$ | |
| Espérance d'une variable géométrique, de Poisson. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\Big(f(X)\Big)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$ | On remarque que la formule s'applique aux couples, aux $n$-uplets de variables aléatoires. |
| Linéarité de l'espérance. Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y)<+\infty$, alors $X$ est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance. Si $X$ est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr. | |
| Pour $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors $XY$ est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$ | Extension au cas de $n$ variables aléatoires. |

## b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Si $X^2$ est d'espérance finie, $X$ est d'espérance finie. Inégalité de Cauchy-Schwarz : si $X^2$ et $Y^2$ sont d'espérance finie, alors $XY$ l'est aussi et : $$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$$ | Cas d'égalité. |
| Variance, écart type. | Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite. |
| Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$. | |
| Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$. | Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. |
| Variance d'une variable géométrique, de Poisson. | |
| Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes. | |