Méthodes à retenir :

- En cas d'indépendance d'évènements, on calcule $\mathbb{P}(\cup A_n) = \sum \mathbb{P}(A_n)$ avec des familles finies ou dénombrables
- En cas d'indépendance d'évènements, on calcule $\mathbb{P}(\cap A_n) = \prod \mathbb{P}(A_n)$ avec des familles finies ; dans le cas général, c'est la formule des probailités composées qui s'applique

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰ *probabilités totales*

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 6 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 3 blanches. On tire au hasard une boule dans l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 2

Soit $p \in]0,1[$ fixé.

On considère la répétition infinie d'expériences indépendantes de mêm loi de Bernoulli $b(p)$, et on note pour tout $n \geq 1$ $F_n =$« on tire face lors de la n-ème tentative. »

1. Eérire avec les symboles $\bigcup$ ou $\bigcup$ les évènements :
   (a) $A =$« on tire pile à chaque tentative »
   (b) $B =$« on tire au moins une fois pile. »
   (c) pour $N \geq 1$ entier fixé, $C_N =$« on tire pour la première fois pile lors de la N-ème tentative. »
2. Calculer les probabilités des évènements précédents, en fonction de p et $N \geq 1$ pour $\mathbb{P}(C_N)$.

Exercice 3 ✰ ✰ *formule de Bayes*

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 4 ✰

On considère le couple (X,Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$, dont la loi est donnée par :
$\mathbf{P}((0,0)) = 1/8$, $\mathbf{P}((0,1)) = 1/4$,
$\mathbf{P}((1,0)) = 3/8$, $\mathbf{P}((1,1)) = 1/4$.

1. Déterminer les lois marginales $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$, à l'aide d'un tableau.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 ✰✰

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli $b(1/2)$. Les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 ✰✰

Démontrer que si X,Y et Z sont trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $X+Y$ et Z sont indépendantes, en utilisant le lemme des coalitions.

II. Exercices

Exercice 7 ✰✰ *probabilités composées*

On fait parcourir à un rat un labyrinthe, dont l'extrémité donne accès à trois boîtes vides et une boîte contenant des friandises. Lorsqu'il accède à une boîte vide, une trappe le ramène à son point de départ et il revient choisir une nouvelle boîte.

1. On suppose que le rat mémorise parfaitement toutes les boîtes déjà visitées. Montrer qu'il fera au plus 4 passages dans le labyrinthe, et déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.
2. On suppose que le rat mémorise courte : il mémorise seulement la dernière boîte visitée. Déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.
3. On suppose que le rat oublie tout le passé. Déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.

Exercice 8 ✰✰

On tire avec remise un grand nombre de fois dans un sac contenant 5 pièces numérotées de 1 à 5. On note p_n la probabilité que la somme des n premiers tirages soit paire.

1. Calculer p_1. Exprimer p_n en fonction de p_{n-1} pour $n \geq 2$.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de $n \geq 1$.

Exercice 9 ✰✰ *CCINP PSI*

Une maladie circule dans la population et on note p la probabilité d'être contaminé. La probabilité d'être contaminé par contagion (contact avec un malade) est égale à $\dfrac{2}{3}$. On considère un commercial qui passe voir n personnes durant sa journée de travail (n clients). On note N la variable aléatoire représentant le nombre de clients contaminés rencontrés par le commercial.

1. Déterminer la loi de N.

2. Quelle est la probabilité que le commercial ne soit pas contaminé à la fin de sa journée de travail ?

Exercice 10 ✰ ✰

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $\mathbb{P}(N = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculez la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur ($G < 0$ si le joueur perd), donnez la loi de G.

Exercice 11 ✰✰

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $0 < \mathbf{P}(B) < 1$. Etablir que

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)\ \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}_{\bar{B}}(A)\ \mathbf{P}(\bar{B})$$

Exercice 12 ✰

Soit $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ définie par $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ pour $p \in]0,1[$ et $Y = f(X)$.

Déterminer l'image $Y(\Omega)$ et calculer les $\mathbb{P}(\{Y = k\})$ pour $k \in Y(\Omega)$

Exercice 13 ✰

Soit $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ définie par $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ et $Y = f(X)$.

Déterminer l'image $Y(\Omega)$ et calculer les $\mathbb{P}(\{Y = k\})$ pour $k \in Y(\Omega)$

Exercice 14 ✰✰

Déterminer la valeur de $a > 0$ pour que l'on puisse définir une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}[X = n] = \frac{a}{n(n+1)}$$

.

Exercice 15 ✰✰✰

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbf{P}\left(X=j, Y=k\right) = \frac{a}{2^{j+1}\ k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 16 ✰✰✰ *Pièce*

On lance une pièce équilibrée plusieurs fois de suite. X est le rang pour lequel on obtient pour la 2ème fois « Pile ». On tire alors une boule dans une urne contenant $X-1$ boules numérotées de 1 à $X-1$ et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Montrer que X admet une variance et une espérance.
2. Déterminer la loi de Y à partir de la loi de Y sachant $\{X=k\}$.
3. Montrer que Y admet une variance et une espérance.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

III. Exercices avancés

Exercice 17 ✰✰ *CCINP PSI*

Soit une variable aléatoire $X \hookrightarrow P(\lambda)$. Soit la variable aléatoire Y définie par $Y=0$ si X est impair et $Y=\dfrac{X}{2}$ si X est pair.

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\operatorname{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer l'espérance de Y^2.

Exercice 18 ✰✰

On considère une infinité de tirages consécutifs (mutuellement indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, X_i vaut 1 si on obtient face lors du $i$ème lancer, 0 si on obtient pile lors du $i$ème lancer.

1. Que représente l'évènement $E_i = \{X_i = X_{i+1}\}$?
2. Que représente l'évènement $V_N = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} E_i$?
3. Calculer $\mathbf{P}(V_N)$, en fonction de $N \in \mathbb{N}^*$.
4. Justifier l'existence et calculer la limite $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(V_N)$.

Exercice 19 ✰✰✰

Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$. Pour quelle valeur de k, la probabilité

$$p_k = \mathbf{P}(X=k)$$

est-elle maximale ?

Exercice 20 ✰✰✰

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y)=(j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 21 ☆☆☆

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 22 ☆☆☆

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, $\min$ désignant ń le plus petit élément de ż.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 23 ☆☆☆

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 24 ☆☆☆ *Probabilités et opérations*

Soit n un entier strictement supérieur à 3 ; n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (évènement noté A) ?

Exercice 25 ☆☆☆ *Formule des probabilités composées, formule de Bayes*

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On réalise k tirages en remettant dans l'urne la boule tirée si elle est noire et en ne la remettant pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
2. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche durant les k tirages ?
4. On suppose que la deuxième boule tirée est noire. Quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

Exercice 26 ✰✰

Une succession d'individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0<p<1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 27 ✰ ✰ ✰

On considère une pièce de monnaie telle qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir face est égale à $2/3$. On lance cette pièce plusieurs fois de suite. Si on obtient face deux fois de suite, on dit que l'on a obtenu un doublé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : "on obtient un doublé pour la première fois à l'issue du $(n+1)$-ème lancer"et D_n l'évènement"on obtient au moins un doublé au cours des $n+1$ premiers lancers. "
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement A_n. On désigne par B l'évènement : "le premier lancer donne pile "et par C l'évènement : " le premier lancer donne face et le deuxième lancer donne pile . "

1. Calculer p_1, p_2, p_3
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbf{P}_B(A_{n+2}) = \mathbf{P}(A_{n+1})$ et $\mathbf{P}_C(A_{n+2}) = \mathbf{P}(A_n)$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+2} = \dfrac{1}{3}p_{n+1} + \dfrac{2}{9}p_n$
4. Déterminer p_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
5. Calculer la probabilité de D_n .

Exercice 28 ✰✰✰✰ *Loi du 0-1*

Un singe tape aléatoirement sur un clavier. On note A l'évènement « Le message du singe contient la séquence de caractères « *J'ai la banane* » »

Déterminer $\mathbb{P}(A)$ sur un clavier à 52 touches sans fonctions spéciales (majuscule, ctrl, Fn, etc...)

Exercice 29 ✰✰✰ *Mines-Ponts*

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $n \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires deux à deux indépendantes, suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Déterminer la loi de la variable (X_1, S_n).

2) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = k)$, où $k \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $(X_1 = \varepsilon)$, où $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Notes

[1] correction : Formule probabilités totales

[2] correction :

[3] correction :

1. Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a $\mathbf{P}(M) = 10^{-4}$, $\mathbf{P}_M(T) = 0,99$ et $\mathbf{P}(T|\bar{M}) = 10^{-3}$
   Par la formule des probabilités totales $\mathbf{P}(T) = P_M(T)P(M) + P_{\bar{M}}(T)P(\bar{M})$
   puis par la formule de Bayes $\mathbf{P}_T(M) = P(M \cap T)P(T) = P_M(T)P(M)P(T)$
   ce qui numériquement donne 9%.
   La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de $1/10000$ et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de $1/1000$.

[4] correction :

$\mathbf{P}_X(0) = 1/8 + 2/8 = 3/8$, $\mathbf{P}_X(1) = 3/8 + 2/8 = 5/8$, $\mathbf{P}_Y(0) = 1/8 + 3/8 = 1/2$, $\mathbf{P}_Y(1) = 2/8 + 2/8 = 1/2$

Non, X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbf{P}((0,0)) = 1/8 \neq 3/8 * 1/2 = 3/16$

[5] correction : Non : X et Y suivent des lois de Bernoulli 1/2 $\mathbf{P}(\{X+Y=2\} \cap \{X-Y=0\} \neq \mathbf{P}(\{X+Y=2\})\mathbf{P}(\{X-Y=0\})$.

[7] correction : 1) bonne porte pour la première fois lors de la n ème tentative : $B_n = \overline{A_1} \cap \dots \overline{A_{n-1}} \cap A_n$, $\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_2) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_3) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_4) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{1}{4}$. 2) $\mathbf{P}(B_n) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3}$

3) N suit la loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{4})$.

[8] correction : $p_n = \frac{2}{5}p_{n-1} + \frac{3}{5}(1 - p_{n-1}) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_{n-1}$

point fixe $\frac{1}{2}$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ est géométrique $u_n = \frac{-1}{10}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$, $p_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2 \times 5^n}$

[12] correction :

[16] correction :

1. Pour $k \geq 2$: $P[X = k] = (k-1)2^{-k}$: choix du pile parmi les $(k-1)$ premiers lancers.
   $E[X] = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \frac{1}{k}\frac{2}{(1-1/2)^3} = 4$
   La série $\sum_{k \geq 2} k^2(k-1)2^{-k}$ CV et $E[X^2] = \sum_{k=2}^{+\infty} k^2(k-1)2^{-k} = \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)2^{-k} + 2\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \frac{1}{2^3}\frac{3!}{(1-1/2)^4} + 2\frac{1}{2^2}\frac{2!}{(1-1/2)^3} = 20$
   $V(X) = 20 - 4^2 = 4$.
2. sachant $\{X = k\}$, Y prend les valeurs $1 \dots, k-1$, donc$Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Pour $n \geq 1$, on a $P[Y = n] = \sum_{k=2}^{+\infty} P[X = k] \times P_{X=k}[Y = n] = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)2^{-k} \times \frac{1}{k-1} = \frac{1}{2^{n+1}} \times 11 - 1/2 = (1-p)^{n-1}p$ pour $p = 1/2$
   Donc (loi géométrique) $E[Y] = 2$, $V[Y] = 2$
3. Non $P[(X = 2) \cap (Y = 3)] = 0$: pas d'indépendance !
4. $E[XY] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} knP[(X,Y) = (k,n)] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1} kn(k-1)\frac{1}{2^k}\frac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}E[X^2] = 10$
   $cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 10 - 4 * 2 = 2$
   $\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[19] correction :

$p_k/p_{k-1} \geq 1 \Longleftrightarrow k \leq (n+1)p$

En notant k_0 la partie entière de $(n+1)p$. La suite $(pk)_{0\leq k\leq k_0}$ est croissante et la suite $(p_k)_{k_0\leq k\leq n}$ est décroissante. Le maximum de p_k est donc atteint en $k = k_0$.

[20] correction :

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$.

   $P(Y=k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P\left((X,Y)=(j,k)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.

   Or, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j\geqslant 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$ donc $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

   $$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (*). \tag{$\star$}$$

   De même, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j\geqslant 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

   $$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (**). \tag{$\star\star$}$$

   Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :
   $P(Y=k) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} + \dfrac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} = \dfrac{(\frac{1}{2}+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.
   Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc :

   $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(X=j) = \dfrac{(\frac{1}{2}+j)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

   Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :
   $P((X,Y)=(0,0)) = 0$ et $P(X=0)P(Y=0) \neq 0$.
2. Posons $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{j,k} = 2^{j+k} P\left((X,Y)=(j,k)\right)$.
   On a $a_{j,k} = \dfrac{j+k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \dfrac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!} + \dfrac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.
   $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{(j-1)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!} = \frac{1}{k!}$.
   De même, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} = \frac{k}{k!}$.
   Ensuite, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{k!} = \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!} = \mathrm{e}$.
   Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
   On en déduit que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et $E\left[2^{X+Y}\right] = 2\mathrm{e}$.

[21] correction :

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n,p).
   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$P(Y=k|X=i)=\begin{cases}\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} \text{ si } k\in[\![0,n-i]\!]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

(b) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(Y=k-i|X=i)P(X=i)$.

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}$.

Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Donc $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k=\binom{n}{k}\left(p(2-p)\right)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

On vérifie que $1-p(2-p)=(1-p)^2$ et donc on peut conclure que :
Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$.

Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}=\frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!}=\frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$, alors :
$E(Z)=np(2-p)$ et $V(Z)=np(2-p)\,(1-p(2-p))=np(2-p)(p-1)^2$.

[22] correction :

1. Soit $i\in[\![1,N]\!]$.
$X_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(X_i=k)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}$.
Alors on a $P(X_i\leqslant n)=\sum_{k=1}^{n}P(X_i=k)=\sum_{k=1}^{n}pq^{k-1}=p\frac{1-q^n}{1-q}=1-q^n$.
Donc $P(X_i>n)=1-P(X_i\leqslant n)=q^n$.
2. (a) $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$P(Y>n)=P((X_1>n)\cap\cdots\cap(X_N>n))$
Donc $P(Y>n)=\prod_{i=1}^{N}P(X_i>n)$ car les variables $X_1,\cdots,X_N$ sont mutuellement indépendantes.
Donc $P(Y>n)=\prod_{i=1}^{N}q^n=q^{nN}$.
Or $P(Y\leqslant n)=1-P(Y>n)$
donc $P(Y\leqslant n)=1-q^{nN}$.
Calcul de $P(Y=n)$:

Premier cas : si $n\geqslant 2$.
$P(Y=n)=P(Y\leqslant n)-P(Y\leqslant n-1)$.
Donc $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.
Deuxième cas : si $n=1$.
$P(Y=n)=P(Y=1)=1-P(Y>1)=1-q^N$.
Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.

(b) D'après 2.(a), $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=\left(1-(1-q^N)\right)^{n-1}(1-q^N)$.
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1-q^N$.
Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y)=\frac{1}{1-q^N}$.

[26] correction :

1. On a $p_1=1$ et $p_2=p$.
Supposons connu p_n. Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales $p_{n+1}=pp_n+(1-p)(1-p_n)$
La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence $p_{n+1}=(2p-1)p_n+1-p$
Sachant la condition initiale $p_1=1$, cette suite arithmético-géométrique à pour terme général $p_n=(1+(2p-1)^{n-1})/2$
Si $p\in]0,1[$ alors $|2p-1|<1$ et donc $p_n\to 1/2$.

[27] correction :

1. La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.
2. On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$

[28] correction : pour $1 \leq i \leq 14$, on note b_i la $i$ème lettre de la phrase et X_i la v.a. représentant le i ème caractère tapé

La probabilité de ne pas taper la phrase lors de 14 premiers caractères tapés est $p_{14} = \left(1 - \dfrac{1}{52^14}\right)$.

La probabilité de ne pas taper la phrase lors des n premiers blocs de 14 caractères tapés est $q_n = \left(1 - \dfrac{1}{52^14}\right)^n$. Cette quantité tend vers 0, et $1 \geq \mathbb{P}(A) \geq q_n \to 1$