Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Normes en dimension finie

I.1 Définition

Définition 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** si :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0\ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

Définition 2.

On dit que $(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel normé si E est un $\mathbb{K} - e.v.$ et si $\| \ \|$ est une norme sur E.

exemple 1. Normes infinie $\| \ \|_\infty^I$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}_b(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$..

lemme 1. *L'égalité* $\sup(kA) = k \sup(A)$ *pour* A *partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{R}^+$ *peut être directement utilisée.*

I.2 Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

On se place dans le cas ou $E = \mathbb{R}^n$, pour un entier $n \geq 1$.

exemple 2. L'application $\| \ \|_\infty : x \longmapsto \max\{|x_i|,\ 1 \leq i \leq n\}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme infinie**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue. L'homogénéïté est directe.

$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ |x_i| = 0) \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$

Pour $x, y \in E$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, donc $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|,\ 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

D'où le résultat. □

exemple 3. L'application $\| \ \|_1 : x \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme** 1.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue.

$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$

Pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, donc $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$

Pour $x, y \in E$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$, donc $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

D'où le résultat. □

exemple 4. L'application $\| \ \|_2 : x \longmapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme euclidienne** ou **norme 2**.

dém : Comme la précédente pour la positivité, le caractère défini et l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité triangulaire, cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

I.3 Norme associée à un produit scalaire

Rappels de PCSI : produit scalaire

Définition 3.

Une application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$ si
$\forall y, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x; y + \lambda z > = < x; y > + \lambda < x; z >$ et $< x + \lambda y; z > = < x; z > + \lambda < y; z >$

Définition 4 (Produit scalaire).

L'application $< \bullet; \bullet >: E \times E \to \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** réel si :

i) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{symétrique}}$
(i.e. $\forall v, w \in E, < w; v > = < v; w >$) ;

ii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$

iii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{positive}}$ (i.e. $\forall v \in E, < v; v > \geq 0$) ;

iv) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{définie}}$ (i.e. $\forall v \in E, (< v; v > = 0 \ \Rightarrow v = 0_E)$) ;

exemple 5. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :
$< x; y > = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, produit scalaire euclidien canonique (p.s. usuel)

exemple 6. Pour $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ on pose :
$< f; g > = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$, produit scalaire sur E.

Définition 5.

Si $< \bullet; \bullet >$ est un produit scalaire sur E on dit que l'application $\|\ \|:\ x \mapsto \sqrt{< x; x >}$ est la **norme associée**

Proposition 2 (propriétés de la norme associée à un p.s.).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $< ;\ >$ et $\|\ \|$ la norme associée.
L'application $\|\ \| : E \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (caractérisant une **norme**) :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

démonstration : la positivité et le caractère séparé de la norme découlent directement de la positivité et du caractère défini du produit scalaire. L'homogénéité découle de la bilinéarité.
Enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité triangulaire. □

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI)).

E espace vectoriel muni du p.s. $<\bullet;\bullet>$. Alors $\boxed{\forall(u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\leq\sqrt{<u|u>}\sqrt{<v|v>}}$
en particulier, si $\|\ \|\ : x\ \mapsto\sqrt{<x|x>}$, on a : $\boxed{\forall(u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\ \leq\ \|u\|\ \|v\|}$.
En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

démonstration :
Soient $x,y\in E$ fixés. On considère $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto<x+ty,x+ty>$.
a) f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 :
$\forall t,\ \ f(t)=<x|x>+<ty|x>+<x|ty>+<ty|ty>=<x|x>+2<x|y>t+<y|y>t^2$.
b) $<\ |\ >$ est positive, donc pour tout $t\in\mathbb{R},\ f(t)\geq 0$.
c) Le discriminant Δ associé à f doit donc être négatif (f ne peut pas changer de signe sur $\mathbb{R}$).
$\Delta\leq 0\iff[2<x|y>]^2-4<y|y><x|x>\leq 0\iff 4<x|y>^2\leq 4<y|y><x|x>$
$\iff|<x|y>|\leq\sqrt{<y|y>}\sqrt{<x|x>}$, car la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

I.4 Normes équivalentes

Définition 6.

Deux normes N et $\tilde{N}$ sur E sont dites équivalentes si :

$$\exists(D,G)\in\mathbb{R}_*^+;\ \forall x\in E,\ G\ \tilde{N}(x)\leq N(x)\leq D\ \tilde{N}(x)$$

exemple 7. Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Théorème 4 (Admis).

Soit $E=\mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension finie** n.
Si N et $\tilde{N}$ sont deux normes sur E, alors elles sont équivalentes.

Contre-exemple en dimension infinie $\|\|_1$ et $\|\|_\infty$ non équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ prendre $f_n:t\mapsto\cos(nt)$, $\|f_n\|_1\to 0$ mais $\|f_n\|\infty=1$

II. Distances, topologie

II.1 Distance associée à une norme

Proposition 5.

Si N est une norme sur E, l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+,\ (x,y) \longmapsto \mathbb{N}(y-x)$ est appelée distance associée à N et vérifie :

i) $\forall x,y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;

ii) $\forall x,y,z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire) ;

iii) $\forall x,y \in E, [\ d(x,y) = 0 \ \Rightarrow x = y\ ]$ (séparation) ;

Remarque 1. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle.

Remarque 2. Il existe des distances non associées à des normes, exemple Hamming

II.2 Boules

2.a) Boule ouverte

On se place dans $(E, \|\ \|)$ e.v.n. et on note d la distance associée.

Définition 7.

Soient $A \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$ défini par : $\boxed{B(A,r) = \{X \in E, d(A,X) < r\} = \{X \in E, \|X - A\| < r\}}$

exemples : $B_f(a,0) = \{a\}$,
$B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée de centre a.

Remarque 3. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle.
exemples : $B(a,0) = \emptyset$, $B_f(a,0) = \{a\}$, $B(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| < 1\}$ est dite « boule unité »ouverte,
$B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée.

2.b) Boule fermée

Définition 8.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$ défini par : $\boxed{B_f(a,r) = \{x \in E, \|x-a\| \leq r\}}$

exemples : $B_f(a,0) = \{a\}$,
$B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée de centre a.

Remarque 4. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle.

II.3 Parties bornées

Définition 9.

Une partie $\mathcal{A}$ de l'espace vectoriel normé $(E, \| \, \|)$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+;\ \forall x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq M$$

Remarque 5. Une partie A de E est dite bornée s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B_f(0, R)$

exemple 8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ est borné (par 2 pour la norme euclidienne usuelle)

Définition 10.

Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Une application $f : E \to F$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+;\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq M$$

exemple 9. $f : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-\|x\|_E}$

II.4 Suites bornées

Définition 11.

Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+;\ \forall n \in \mathbb{N} \in \mathcal{A},\ \|u_n\| \leq M$$

II.5 Fonctions bornées

Définition 12.

Une fonction $f : E \to F$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+;\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq M$$

III. Limites d'une suite vectorielle

III.1 Définition

Définition 13.

Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \, \|)$, une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $L \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|U_n - L\| \leq \varepsilon$$

Si tel est le cas, on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$

Remarque 6. En dimension finie, en notant $\| \ \|_\infty : X \mapsto \max_i |x_i|$ la norme infinie, cela revient à :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|X_n - L\|_\infty \leq \varepsilon}$

Comme toutes les normes équivalentes (dim finie), cette notion de limite quantifiée s'étend pour toute autre norme sur $\mathbb{R}^p$:

$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|X_n - L\|_F \leq \varepsilon}$

III.2 Propriétés des limites

2.a) Cas de la dimension finie

Théorème 6 (limite et coordonnées).

Dans E e.v.n. de dimension **finie** égale à p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell \Longleftrightarrow \left(\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} U_{n,i} = \ell_i\right)$,

où l'indice i désigne la $i$ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

démonstration : comme $\| \ \|$ est équivalente à $\| \ \|_\infty$, on obtient le résultat. □

Définition 14 (limite en dimension finie).

On dit qu'une suite $(X_n(x_{n,1};\ldots;x_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $F = \mathbb{R}^p$ converge vers $L(\ell_1;\ldots;\ell_p)$ si :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_i$$

exemple 10. La suite $(U_n) = ((1+1/n)^n, \sin(1/n))$ converge vers $(\mathrm{e}, 0)$.

Notation 1. *Lorsqu'une suite vectorielle (X_n) converge vers une limite L, on note cela :* $\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L}$

2.b) Généralités

Proposition 7.

Toute suite convergente est bornée.

démonstration : ce résultat a été vue pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : toutes les composantes sont bornées.

Proposition 8.

Toute suite extraite d'une suite convergente converge, vers la même limite.

démonstration : ce résultat a été vue pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : cela est vraie pour toutes les composantes.

exemple 11. Suite de matrices

Proposition 9 (opérations sur les limites).

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\lambda X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda X + Y$

démonstration : on se ramène au cas réel pour les composantes.

Remarque 7. Idem pour les limites infinies et les théorèmes sur les cas d'indétermination de limites restent inchangés sur les composantes.

Nouveau programme 2022

Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.

Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$ et $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\\| \\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie. Fermé d'un espace normé. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	Une boule ouverte est un ouvert. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.

Contenus	Capacités & Commentaires
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	