

Méthodes à retenir :

- Si $\sum a_n x^n$ converge, alors le rayon de convergence R vérifie : $R \geq |x|$.
- Si $\sum a_n x^n$ diverge, alors le rayon de convergence R vérifie : $R \leq |x|$.
- Pour déterminer le rayon de convergence, on peut appliquer la règle de d'Alembert vue pour les séries numériques, en posant, pour $z \neq 0$: $\alpha_n = |a_n z^n|$, puis en discutant selon les valeurs de z .
- Une fonction f DSE est paire (resp. impaire) si et seulement si le DSE de f ne contient que des puissances paires (resp. impaires).
- Pour trouver l'unique solutions DSE de l'équation différentielle linéaire $a(t)y' + c(t)y = d(t)$, avec la condition initiale $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, lorsque a ne s'annule pas, a, b, c sont continues sur I intervalle,
 - on suppose (analyse) qu'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $] -r, r[$ et solution de l'équation différentielle ; puis on effectue des regroupements de coefficients et changements d'indices pour réécrire cette équation sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n t^n$; à l'aide de l'unicité du DSE, on en déduit que les c_n sont tous nuls, ce qui permet de trouver une relation de récurrence permettant de préciser la suite (a_n) .
 - on vérifie alors (synthèse) que pour de telles suites le rayon de convergence associé est effectivement strictement positive.
- Cette méthode fonctionne sur des équations différentielles d'ordre 2 ou plus, l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy doit être explicitement admise dans les énoncés.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières :

a) $\sum_{n \geq 0} 2^n z^n$;

b) $\sum_{n \geq 1} (n+1)z^n$;

c) $\sum_{n \geq 0} e^{-n} z^n$;

Exercice 2 ☆

Développer en série entière sur un voisinage de l'origine $] -a, a[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1-x^5}$.

Exercice 3 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n}}{3n}$.

Exercice 4 ☆☆

Soit $x \in] -1, 1[$.

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} ;$$

2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} ;$$

3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$,

et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

II. A savoir rédiger

Exercice 5 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \operatorname{ch}(n) x^n$

Exercice 6 ☆☆ CCP PSI

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{3n}{n+2} x^n$ puis calculer sa somme.

Exercice 7

Déterminer toutes les solutions développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, pour $r > 0$ de l'équation différentielle :

$$y' + 2x^2y = e^x \quad (E)$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$

III. Exercices

Exercice 8 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $a_n = :$

- a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\frac{n^n}{e^{nn!}}$; c) $\frac{\ln n}{1 + \ln n}$; d) $\begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$;
e) $\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$; f) $e^{in\theta}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé;

Exercice 9 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 10 ☆☆ Mines-Télécom PC

On pose, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$.

1. Préciser le rayon de convergence de f .
2. Montrer que f est solution de $(E) : (1-x)y'(x) = (p+1)y(x)$ sur son intervalle ouvert de convergence.
3. Donner une expression de f .

Exercice 11 ☆☆

Former le développement en série entière de

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Exercice 12 ☆☆☆

1. Justifier que l'on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

2. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right)$$

- converge simplement sur $[0, 1]$.
3. calculer la somme S de cette série.
4. La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 13

Déterminer toutes les solutions développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, pour $r > 0$ de l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \quad (E)$$

avec la condition initiale $y(0) = a$ et $y'(0) = b$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés.

Exercice 14 ★★★

Trouver toutes les solutions développables en série entière sur un voisinage $] - a, a[$ de 0 de l'équation différentielle :

$$(E) \quad 2x y'' + y' - y = 0$$

Exercice 15 ★★★

Soient $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$.

Déterminer les rayons de convergences et sommes des séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$.

Exercice 16 ★★★★★

Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et sa somme en cherchant une équation différentielle du 3e ordre qu'elle vérifie.

Exercice 17

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' + 3y' - 4x^3y = 0.$$

- Si F est une solution de (E) développable en série entière sur un voisinage $I =] - a, a[$ de 0 (avec $a > 0$), on note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in I$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Exprimer $F(0)$ et $F'(0)$ à l'aide des éléments de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En déduire qu'il existe une unique solution F développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation (E) qui vérifie $F(0) = 1$ et $F'(0) = 0$.
- Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 18 ★★★★★ Mines-Ponts PC

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$

- Déterminer la limite de (I_n) .
- Donner un équivalent de (I_n) .
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Etudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 19

Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière et solutions de l'équation différentielle :

$$xy''(x) - y(x) = 0$$

Exercice 20 ★★★★★

Soient $I =] - 1, 1[$ et $f : x \mapsto (\text{Arcsin } x)^2$.

- Rappeler le développement en série entière de Arcsin sur I , et justifier que f y est développable en série entière.
- Montrer que : $\forall x \in I, (1 - x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$
- En dérivant, justifier que f est solution sur I de l'équation différentielle : $(E) (1 - x^2)y'' - xy' = 2$
- On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les coefficients du DSE de f sur I .
 - montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n + 1)(n + 2)a_{n+2} - n^2 a_n = 0$.
 - Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et en déduire a_0, a_1, a_2 .
 - En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0, a_{2n} = \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{n(2n-1)!}$
- En déduire le développement en série entière de f sur I . Vérifier qu'il est constitué de puissances paires.

Exercice 21 ★☆☆ Série de Hadamard

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R' .

- Justifier que le rayon de convergence R'' de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie l'inégalité : $R'' \geq RR'$
- A l'aide des séries entières $\sum z^{2n}$ et $\sum z^{2n+1}$, justifiez que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 22 ★★★

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de

rayons de convergence respectifs R et R' , justifier que :

1) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n|$, alors $R' \leq R$.

2) a) comparer R et R' lorsque $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$;

b) montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n$ a un rayon de convergence R'' tel que $R'' \geq RR'$;

c) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n^3 z^n$ est R^3 ;

d) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$

est \sqrt{R} ;

Exercice 23 ★★★ Mines-Ponts PC

On pose $a_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 24

Soit

$$f : x \mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Déterminer un intervalle I ouvert contenant 0 le plus grand possible sur lequel f peut être définie.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1.
3. Déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.
4. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser les coefficients de son développement en série entière.

Notes

¹ correction :

² correction :

⁵ correction : A l'aide de la règle de d'Alembert pour des séries numériques

¹¹ correction :

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2} = (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \text{ pour tout } x \in]-1, 1[$$

¹³ correction : $a_{m+1} = \frac{a_m}{(m+1)(m+2)}, \forall m \geq 0$, puis $a_n = \frac{a_0}{n!(n+1)!}, \forall n \geq 0$.

Puis $y : x \mapsto \sum \frac{x^n}{n!(n+1)!}$ et r;c.v. $R = +\infty$.

$$z'(x) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, z''(x) = \frac{f''(\sqrt{x})}{4x} + \frac{-f'(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}$$

d'où $f'' - f = 0$, on peut prendre $z : x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{x}) + \mu \sin(\sqrt{x})$.

$$S_E = \{x \mapsto \alpha y(x) + \beta z(x)\}$$

¹⁴ correction : $y(x) = C1 * \sinh(\text{sqrt}(x) * \text{sqrt}(2)) + C2 * \cosh(\text{sqrt}(x) * \text{sqrt}(2))$

¹⁵ correction :

¹⁶ correction :

¹⁷ correction :

¹⁸ correction :

a) TCD avec $e^{-t^n} \leq e^{-t}$ b) CDV $u = t^n, I_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u} du$ et TCD $\int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u} du \xrightarrow{f} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ donc $I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ c) $R = 1$ par d'Alembert, et la série diverge en 1. Le CSSA donne la convergence en -1 .

²³ correction : On pose $b_n = \frac{a_n}{n!}$ R le RCV de $\sum b_n z^n$. On a $b_0 = 1$ et $(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} b_k$;

On a $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6$. et $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$

$b_n = 1$ pour tout n est une suite qui convient donc c'est elle et $a_n = n!$.

²⁴ correction :

1. f définie sur $] -1, 1[$ et y est DSE comme produit de telles fonctions.

2. $(x^2 - 1)y' + xy - 1 = 0$

3. $-(a_1 + 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (na_{n-1} + (n+1)a_{n+1})x^n = 0$

$$a_0 = f(0) = \pi/2 \quad a_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad a_1 = -1 \quad a_{2q+1} = -\frac{(2^q q!)^2}{(2q+1)!}$$

4. f est DSE sur $] -1, 1[$ comme produit de telles fonctions!