I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✩✩

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\| \ \|$ euclidienne usuelle, dessiner la boule fermée de centre $\Omega(1,1,0)$ et de rayon 2.

Exercice 2

En remarquant que $\| \ \|_\infty : M \mapsto \max\{|M_{ij}|,\ i,j \in [\![1,n]\!]\}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, étant donnée une suite $(M_p)_p$ de matrices qui converge vers une limite M, comment peut-on quantifier cette limite, avec $\varepsilon > 0$?

Exercice 3 *Normes Vectorielles*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i \leq n} |x_i|$. On rappelle que $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes.

1. Montrer que :
   $\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$
2. Montrer que :
   $\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$

II. Exercices

Exercice 4 ✩

Justifier que la suite $\left(\begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \frac{1}{n!} \\ \mathrm{e}^{-n} & \cos(n) \end{pmatrix}\right)_n$ est bornée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 ✩

Justifier que la fonction $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{1+\|(x,y)\|_2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 ✩

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ N(x) = \max(|x_1+x_2|, |x_1|, |x_2|)$
est une norme, puis dessiner la boule fermée
$B_f(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2; N(x) \leq 1\}$.

Exercice 7 ✩✩✩ *Norme matricielle*

On appelle trace d'une matrice carrée A d'ordre n le nombre noté $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ égal à la valeur de la somme des coefficients diagonaux d'une matrice.

1. Démontrer que l'application
   $$(M,N) \longmapsto \mathrm{tr}(M^T \times N)$$
   définie un poduit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que l'application
   $$N : M \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}(M^T \times M)}$$
   définie une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

III. Exercices avancés

Exercice 8

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On rappelle que :
$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t}$ et $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ sont des normes sur E.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et
   $f_n : t \longmapsto \begin{cases} 1-nt & \text{si} \quad t \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si} \quad t > 1/n \end{cases}$
   Montrer que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$
3. Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 9 *Normes en dimension infinie*

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $N; f \longmapsto \int_0^1 e^x |f(x)| \mathrm{d}x$

1. Montrer que N est une norme.
2. pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   $$f_n : x \longmapsto \begin{cases} = \quad 1-nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ = \quad 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \end{cases}$$
   (a) tracer les graphes de f_4 et f_{10}.
   (b) Déterminer les suites $(N(f_n))_n$ et $(\|f_n\|_\infty)_n$.
   (c) les normes N et $\| \ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 10 ✩✩✩

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\| \ \|$ euclidienne usuelle, calculer la distance du point $A(1,-1,1)$ au plan d'équation $x+z=0$, à l'aide d'une projection orthogonale.

Notes

[1] correction : Utiliser la définition de boule fermée

[3] correction :

[6] correction : préciser les bords