# Table des matières



# Pré-requis

# Objectifs

# Premiers exemples

**exemple 1** (Transformée de Fourier).

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}t, \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

$\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ , on dominant par $\varphi : t \mapsto |f(t)|$
Par IPP $\hat{f}'(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi)$

**exemple 2** (Transformée de Laplace).

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t, \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}).$$

# I. Théorème de Continuité

**Théorème 1** (de continuité d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient $A$ et $I$ deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A,\ f_{x,\bullet} : I \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux** sur $I$ ;
($f$ cont. p. morc. % à $t$)

ii) pour tout $t \in I,\ f_{\bullet,t} : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur $A$; ($f$ continue % à $x$)

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur $I$ telle que :

$$\forall\,(x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse de domination de $f(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % à $t$)

Alors la fonction $\boxed{g : A \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } A.}$

*Remarque* 1. ii) et iii) assurent l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$, pour tout $x \in A$ fixé.

*démonstration :* (non exigible)
idée : pour $(x_n)$ une suite réelle qui converge vers $x \in I$ fixé, on introduit la suite de fonctions $(u_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : t \mapsto f(x_n,t)$.

La suite $(u_n)$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $I$ et intégrables, qui converge simplement vers $u : t \mapsto f(x,t)$, et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |u_n(t)| \leq \varphi(t)$, donc d'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I u(t)\,\mathrm{d}t$, i.e. $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$. $\square$

**Généralisation : domination locale compacte :**
Lorsque l'hypothèse de domination de $f$ est vérifiée sur toute partie de la forme $K \times I$ avec $K$ segment de $A$, par une fonction $\varphi_K$, la conclusion reste vraie : $g$ est alors continue sur tout segment $K$ de $A$, donc sur $A$.

*on peut remplacer iii) par l'hypothèse moins forte iii') :*
iii')Pour tout segment $K = [u,v]$ de $A$, il existe une fonction $\varphi_K : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et

**intégrable** sur $I$ telle que : pour tout $(x,t) \in [u,v] \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.
(hypothèse de domination sur tout segment $K$ de $A$ de $f(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % $t$)

**exemple 3.** $g : ]-1,+\infty[ \to \mathbb{R};\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+(t^2+1)(2+\cos(t))}\mathrm{d}t$

est continue.

Il suffit de considérer $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

**exemple 4.** $\Gamma : ]0,+\infty[,\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Est continue, par domination pour $x \in [a,b]$ par $\varphi : t \mapsto \max(t^{a-1}e^{-t}, t^{b-1}e^{-t})$ continue positive intégrable.

# II. Théorème de convergence dominée à paramètre continu

**Théorème 2** (de convergence dominée à paramètre continu ).

Soient $A$ et $I$ deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, $a$ une borne de $A$, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$

ii) Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur $I$

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **intégrable** sur $I$ telle que :

$$\forall\,(x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $\ell$ est intégrable sur $I$ et $\boxed{\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.}$

*Remarque* 2. On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

**exemple 5.** $h : [0,+\infty[ \times [1,+\infty[ \to \mathbb{R};\ (x,t) \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^2}$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x,t) = 0$

Domination : $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ qui ne dépend pas de $x$.

On obtient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$

# III. Dérivabilité

**Théorème 3** (de dérivation d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible))**.**

Soient $A$ et $I$ deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \to \mathbb{K},\ (x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$ la fonction $f_{x,\bullet} : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** **intégrable** sur $I$ ;

ii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ ;

iii) pour tout $x \in A$ la fonction $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,\bullet} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** sur $I$ ;

iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **positive** , **continue par morceaux** et **intégrable** sur $I$ telle que :

pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.

(hypothèse de domination de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % $t$)

Alors la fonction $\boxed{g : A \to \mathbb{K},\ x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } A}$ et pour tout $x \in A$ on a $\boxed{g'(x) = \int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t}$.

*Remarque* 3. iii) et iv) assurent l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, pour tout $x \in A$ fixé.

*Remarque* 4. **Généralisation : domination locale compacte :**
Lorsque l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie de la forme $K \times I$ avec $K$ segment de $I$, par une fonction $\varphi_K$, la conclusion reste vraie !

iv) peut être remplacée par iv)') « Pour tout segment $K = [a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi_K : I \to \mathbb{R}$ **positive** , **continue par morceaux** et **intégrable** sur $I$ telle que :
pour tout $(x,t) \in [a,b] \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t)$. »

On obtient la classe $\mathcal{C}^k$ sur tous les segments $K$ de $A$ donc sur $A$.

*démonstration :* (non exigible)

Soient $a \in A$, $T : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ \displaystyle\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x = a \end{cases}$

On va montrer que $T$ est continue en $a$.
pour $(x_n)$ une suite réelle qui converge vers $a \in A$ fixé sans jamais l'atteindre, on a par linéarité :
$T(x_n) = \int_I h_n(t)\,\mathrm{d}t$, où $h_n : t \mapsto \dfrac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n - a}$

La suite $(h_n)$ est une suite de fonction continues par morceaux, elle converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ (par définition des dérivées partielles).

Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\eta, a+\eta]$, $|h_n(t)| \leq \|x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\|_{\infty,[a-\eta,a+\eta]} \leq 2\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)\right| + e^{-t^2} = \varphi(t)$, par inégalité des accroissements finis et continuité de $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

mais alors, d'après le TCD, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$, i.e. $T(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(a)$. $\square$

**Théorème 4** (de dérivations successives d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible))**.**

Soient $A$ et $I$ deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, $k$ un entier naturel, et $f : A \times I \to \mathbb{K},\ (x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$ la fonction $f_{x,\bullet} : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** **intégrable** sur $I$ ;

ii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $A$ ;

iii) pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et tout $x \in A$ la fonction $\left(\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}\right)_{x,\bullet} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** sur $I$ ;

iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **positive** , **continue par morceaux** et **intégrable** sur $I$ telle que :

pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.

(hypothèse de domination de la dérivée partielle $k$-ème % à $x$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\bullet)$ , par une fonction intégrable % $t$)

Alors la fonction $\boxed{G : A \to \mathbb{K},\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } A}$ et pour tout $x \in A$ on a $\boxed{G^{(i)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\,\mathrm{d}t}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$.

*démonstration :* par récurrence sur $k \geq 1$. $\square$

## Application à la fonction $\Gamma$ :

On pose $A = ]0, +\infty[$, $I = ]0, +\infty[$ et $z : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \longmapsto \mathrm{e}^{(x-1)\ln t - t}$.

[i)] pour tout $x \in A$ la fonction $z_{x,\bullet} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{(x-1)\ln t - t} \end{array}$ est continue donc **continue par morceaux** sur $I$ ;

En $0$, $z_{x,\bullet}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, avec $x-1 > -1$ donc par comparaison et d'après le cours sur les intégrales de Riemann, $z_{x,\bullet}$ est intégrable en $0$.

En $+\infty$, $z_{x,\bullet}(t) \underset{t\to 0}{=} t^{-2}$ par croissances comparées, donc par comparaison et d'après le cours sur les intégrales de Riemann, $z_{x,\bullet}$ est intégrable en $0$.

[ii)] Pour tout $t \in I$, $x \mapsto z(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $A$;

On calcule $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) = (\ln t)^i t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ pour $i \in [\![1,k]\!]$ et $x, t > 0$ (par récurrence sur $i$).

[iii)] pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et tout $x \in A$ la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^i z}{\partial x^i}(x,t)$ est **continue par morceaux** sur $I$ ;

[iv)] Pour $K = [a,b] \subset ]0,+\infty[$,

On a pour $x \in [a,b]$ et $t > 0$ :

$\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq \varphi_K(t)$, où l'on pose $\varphi_K(t) = \{$

La fonction $\varphi_K : I \to \mathbb{R}$ est **positive** , **continue par morceaux**.

En $0$, $\varphi_K(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}|\ln t|^k \underset{t\to 0}{=} o(t^{\frac{x}{2}-1}$, car $t^{x/2}|\ln t|^k \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, avec $x/2 - 1 > -1$ donc par comparaison et d'après le cours sur les intégrales de Riemann, $\varphi_K$ est intégrable en $0$.

En $+\infty$, $\varphi_K(t) \underset{t\to 0}{=} t^{-2}$ par croissances comparées, donc par comparaison et d'après le cours sur les intégrales de Riemann, $\varphi_K$ est intégrable en $0$.

Ainsi $\varphi_K$ est **intégrable** sur $I$.

On en déduit que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur (tout segment $K$ de) $A$ et que :

$$\forall x > 0,\ \forall t > 0, \Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

NOUVEAU Programme PC 2022 :

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|

**f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre**

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à $x$ et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à $t$.*

Théorème de continuité :
si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $A$ ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;
- il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ ;

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $A$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de $A$, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu:
si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a$ une borne de $A$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$ ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur $I$ ;
- il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ ;

alors $\ell$ est intégrable sur $I$ et :

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Théorème de dérivation :<br>si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$, telle que :<br>— pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ ;<br>— pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $I$ ;<br>— pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;<br>— il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$ ;<br>alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ et vérifie :<br>$\forall x \in A, \quad g'(x) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$ | La démonstration n'est pas exigible.<br>En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de $A$, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. |
| Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$. | |
| | Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise. |