Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Rappels euclidiens : bases orthonormées, projection

On se place dans E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'un **produit scalaire** $< \ | \ >$, et on note $\| \ \| : x \mapsto \sqrt{< x|x >}$ **la norme associée**.

On dit aussi que $(E, < \ | >)$ est un espace euclidien.

I.1 Famille orthogonale

Définition 1.

Une famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, est dite **orthogonale** si :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow < x_i|x_j >= 0$

Théorème 1 (de Pythagore).

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

dém : Par bilinéarité : $< \sum_{i=1}^{n} v_i | \sum_{j=1}^{n} v_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} < v_i|v_j >= \sum_{i=1}^{n} < v_i|v_i >$

Proposition 2.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

dém : par Pythagore $0 = \sum \|\lambda_i x_i\|^2$ donc $\lambda_i x_i = 0_E$ pour tout i.

Variante directe : soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < x_i|x_j >= 0$$

Soit $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad (\star)$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a donc $0 =< x_j|0_E > \underset{(\star)}{=} < x_j| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i > \underset{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x_j|x_i >= \lambda_j \|x_j\|^2$, et x_j non nul donc $\|x_j\|^2 \neq 0$. Ainsi $\lambda_j = 0$. $\square$

I.2 Base orthogonale

Définition 2 (B.O.N.).

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite **base orthonormée** si elle est libre et génératrice et vérifie :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ < e_i | e_j >= \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 3 (expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une b.o.n).

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives dans cette base $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i =< e_i | x >=< x | e_i >}$$

$$\boxed{< x | y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\ y_k}$$

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}$$

dém : $x_1, \dots, x_n$ sont les les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $< x | e_i >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k | e_i >= \sum_{k=1}^{n} x_k < e_k | e_i >= x_i \|e_i\|^2 = x_i$.

On a :

$$< x | y >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k | \sum_{m=1}^{n} y_m e_m >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} x_k y_m < e_k | e_m >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

En particulier, si $y = x$, on a $\|x\|^2 =< x | x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. $\square$

Remarque 1. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, le calcul de $< x | y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$ s'identifie au calcul matriciel $X^T Y = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) \in \mathfrak{M}_{11}(\mathbb{R})$.

I.3 Projection orthogonale sur un s.e.-v.

Définition 3 (orthogonal d'un s.e.v.).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace (vectoriel) **orthogonal** l'ensemble, noté $F^{\perp}$
défini par :
$F^{\perp} = \{y \in E;\ \forall x \in F,\ < x|y >= 0\}$.

Proposition 4 (projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie).

Soit $(E, <\ \ |\ \ >)$ un espace préhilbertien (réel, de dimension quelconque) et F un s.e.v. de E de **dimension finie**.
Pour tout $x \in E$, il **existe** un **unique** élément $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$; il est noté $y = P_F(x)$ et est appelé $\boxed{\textbf{projeté orthogonal}}$ de x sur F.

En outre, si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base **orthonormale de F**, alors $\boxed{P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} < u_j|x > u_j.}$

démonstration : Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormale de F.
analyse : Soient $x \in E$ et supposons qu'il existe un vecteur $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$.

Comme $y \in F$, $\exists!(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$; $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Puisque $x - y \in F^{\perp}$, pour tout $z \in F$, on a $< z; x - y >= 0$. En particulier, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $< u_j|x - y >= 0$ (1).
(1) $\iff < u_j|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i >= 0 \iff < u_j|x > - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < u_j|u_i >= 0 \iff \quad \lambda_j =< u_j|x >$, car $\mathcal{B}$ est orthonormale.

On a donc nécessairement $y = \sum_{i=1}^{n} < u_i|x > u_i$ (2).

synthèse : soit y donné par (2). On a $y \in F$. Par ailleurs, soit $z \in F$. Il existe $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$; $z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$.

D'où $< x - y|z >=< x - y|\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i >= \sum_{i=1}^{n} \mu_i\ (< x|u_i > - < y|u_i >) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\ (< x|u_i > - < u_i|\ \ < x|u_i > u_i >) = 0$.
Donc $\forall z \in F,\ < x - y|z >= 0$, donc y convient. $\square$

I.4 Construction de bases orthogonales

Proposition 5 (Algorithme de *Gram-Schmidt*).

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de vecteurs de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $F_i = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_i)$.

En posant, $\boxed{g_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|} f_1}$,

puis, pour i allant de 2 à n, $\boxed{g_i' = f_i - p_{F_{i-1}}(f_i) = f_i - \displaystyle\sum_{\ell=1}^{i-1} < g_\ell | f_i > g_\ell \text{ puis } g_i = \frac{1}{\|g_i'\|} g_i'}$,

la famille $\boxed{\mathcal{B}_{GS} = (g_1, \dots, g_n) \text{ est une base orthonormée}}$.

En outre $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_i) = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_i)$.

démonstration :

E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $< ; >$, et $\| \ \|$ la norme associée.
On montre par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ la propriété
$\mathcal{P}_k$:
« en posant, $e_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|} f_1$, et pour i allant de 2 à k, $e_i' = f_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} < e_k | f_i > e_k$ puis $e_i = \dfrac{1}{\|e_i'\|} e_i'$,
la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormale de $F_k = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. »
<u>initialisation :</u> $F_1 = \operatorname{Vect}(f_1)$ est une droite vectorielle de E, et f_1 est un vecteur non nul de F. Donc $e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$ est unitaire et $F = \mathbb{R} e_1$.
<u>hérédité :</u> supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.
F_{k+1} est un s-.e.v. de E de dimension $k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormé de F_k
Pour $j \in [\![1, k]\!]$, $< e_j' | e_{k+1}' >=< e_j | [f_{k+1} - \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell | f_{k+1} > e_\ell] >$

$$=< e_j | f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell | f_{k+1} >< e_j | e_\ell >=< e_j | f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell | f_{k+1} > \delta_j^\ell =< e_j | f_{k+1} > - < e_j | f_{k+1} >= 0$$

donc $e_{k+1}' \perp F_k$, et la famille $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}')$ est orthogonale.

Par ailleurs, comme la famille $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est libre, et que $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell | f_{k+1} > e_\ell \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, on ne peut pas avoir $e_{k+1}' = 0_E$, donc $e_{k+1} = \dfrac{1}{\|e_i'\|} e_i'$ existe et est unitaire.

Ainsi, d'après ce qui précède, la famille $\mathcal{F}_{k+1} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ est une famille orthonormale, donc libre.
Par construction, $F_{k+1} = F_k \oplus \operatorname{Vect}(f_{k+1})$, et $\mathcal{F}_{k+1}$ est contituée de $k+1$ vecteurs de F_{k+1} de dimension $k+1$, donc en est une base orthonormale, ce qui montre la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$. □

I.5 Somme directe orthogonale

Définition 4 (s.e.v. orthogonaux).

On dit deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **orthogonaux** si : $\forall f \in F, \ \forall g \in G, \ < f|g >= 0$.

Proposition 6 (somme directe orthogonale).

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E **orthogonaux**, alors la somme $F+G$ est directe. On dit qu'elle est **directe orthogonale**, et on note $F+G = F \oplus G = F \oplus^{\perp} G$.

dém : Pour $x \in F \cap G$, on a $< x|x >= 0$, donc $x = 0_E$. $\square$

Proposition 7 (somme directe orthogonale).

Pour E de dimension finie, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\boxed{E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}}$.
$\boxed{\dim(F^{\perp}) = \dim E - \dim(F)}$

démonstration : En effet comme $F \perp F^{\perp}$, on a $F + F^{\perp} = F \oplus^{\perp} F^{\perp} \subset E$
pour $x \in E$, on a $x = P_F(x) + (x - P_F(x)) \in F + F^{\perp}$. $\square$

Terminologie : pour E e.v. de dimension finie, et F un s.e.v. de E, on dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F.

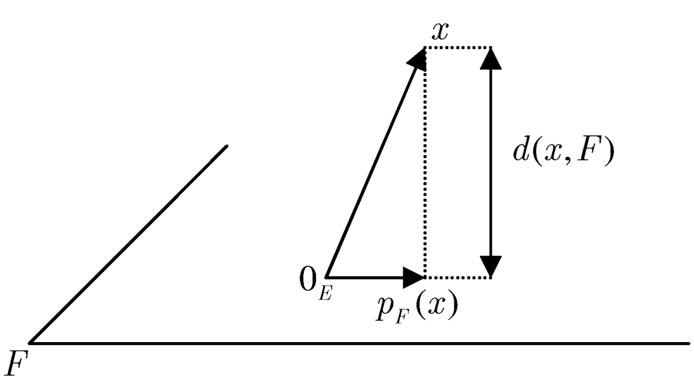
I.6 Distance à un s.e.v.

Proposition 8 (inégalité de Bessel).

Si F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de l'espace vectoriel E et $x \in E$ fixé.
Alors :

$$\forall x \in E, \ \|x\| \geq \|P_F(x)\|$$

De plus le vecteur $P_F(x)$ est l'unique vecteur $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| = d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\|$



dém :

- La relation $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ implique $\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + 2 < x - P_F(x)|P_F(x) > + \|P_F(x)\|^2$ donc que $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + d(x,F)^2 \geq \|P_F(x)\|^2$. d'où $\|x\| \geq \|P_F(x)\|$

- On va ensuite montrer que l'application $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$ atteint son minimum en un unique point y_{min} de F, qui

est $y_0 = P_F(x)$.

Pour $x \in E$ et $y \in F$, on a dans la somme directe $E = F \oplus^\perp F^\perp$:
$x = P_F(x) + (x - P_F(x))$.
Donc
$\|x - y\|^2 = \|(x - P_F(x)) + P_F(x) - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + 2 < x - P_F(x)|P_F(x) - y > + \|P_F(x) - y\|^2$
$= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geq \|P_F(x) - y\|^2$ avec égalité ssi $y = P_F(x)$.

Donc $\|x - y\| \geq \|P_F(x) - y\|$ avec égalité ssi $y = P_F(x)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 2. Ainsi $d(x,F) = \inf\{\|x - y\|;\ y \in F\} = \|x - P_F(x)\|$. est la distance de x à F.

II. Isométries des espaces euclidiens

On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E est, muni du produit scalaire $< \mid >$, et on note $\| \| : x \mapsto \sqrt{< x|x >}$ la norme associée.

On a ainsi $(E, \| \|)$ est un espace euclidien, dans toute cette partie.

II.1 Isométries vectorielles

1.a) Définition

Définition 5.

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie** de E si :

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|$$

En d'autres termes, une **isométrie** vectorielle est un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve la norme.

Notation 1. *On note $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ ; \ \forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|\}$ l'ensemble des isométries de E.*

Définition 6.

L'ensemble $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ ; \ \forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|\}$ des isométries de E est appelé **groupe orthogonal**.

Remarque 3. On verra que $\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.

1.b) Propriétés

Proposition 9.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ conserve la norme, alors u est bijectif, donc est un automorphisme.

démonstration :

Si $x \in E$ est tel que $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc par caractère défini de la norme $\| \|$, on a $x = 0_E$. D'où $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est vrai car $\mathrm{Ker}(u)$ est un s.-e.v., donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, donc u est injective.

Mais alors u est un endomorphisme injectif, donc (conséquence du théorème du rang) u est bijectif. $\square$

Terminologie 7.

On appelle **automorphisme orthogonal** de E toute **isométrie** de E.

Proposition 10 (groupe des isométries).

$\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.

dém : Pour id_E est une isométrie, donc $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$.

Pour $u, v \in \mathcal{O}(E)$ et pour tout $x \in E$, $\|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$, donc $u \circ v$ est une isométrie et $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition.

Pour $u \in \mathcal{O}(E)$, comme $u \in \mathcal{GL}(E)$ par la proposition précédente, on a l'existence de l'inverse u^{-1} de u.

Pour tout $x \in E$, $x = u(u^{-1}(x))$, donc $\|x\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|u^{-1}(x)\|$, donc u^{-1} est une isométrie et $\mathcal{O}(E)$ est stable par passage à l'inverse. $\square$

Proposition 11 (caractérisation par la conservation du p.s.).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E euclidien muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et $\| \ \|$ la norme associée. Alors u est une isométrie si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \ < u(x)|u(y) > = < x|y >$$

En d'autres termes, un endomorphisme d'un espace euclidien E est une **isométrie** vectorielle si et seulement si il conserve le produit scalaire.

démonstration : Si u conserve le produit scalaire, alors pour $x \in E$, on a :
$\|u(x)\| = \sqrt{< u(x)|u(x) >} \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} \sqrt{< x|x >} = \|x\|$, donc u conserve la norme.

Si u conserve la norme, alors pour $x, y \in E$, on a :
$< u(x)|u(y) > \underset{polarisation}{=} \dfrac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) \underset{lin}{=} \dfrac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)$
$\underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \underset{polarisation}{=} < x|y >$, donc u conserve le produit scalaire. $\square$

Proposition 12 (caractérisation par l'image d'une b.o.n.).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E euclidien muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et $\| \ \|$ la norme associée. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est une isométrie

ii) Pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est base orthonormée de E.
i.e. l'image par u de toute base orthonormée est une base orthonormée

iii) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est base orthonormée de E.
i.e. l'image par u d'une base orthonormée est une base orthonormée

démonstration : $i) \Rightarrow ii)$ découle de la propriété précédente : pour $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une b.o.n., on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\delta_i^j =< e_i|e_j > \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} < u(e_i)|u(e_j) >$$

$ii) \Rightarrow iii)$ est immédiat.

$iii) \Rightarrow i)$:

Pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n. telle que $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ b.o.n., on a pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, comme par linéarité $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$, en utilisant la formule de calcul de la norme à l'aide des décompositions dans des b.o.n. : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|u(x)\|$.

$\square$

lemme 13. *Soient $u \in \mathrm{O}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.*

Alors $u(F) = F$

démonstration : la restriction de u à F, $u_{|F} : F \to F$, la restriction de u à F, est injective. Comme F est de dimension finie, elle est donc bijective.

Proposition 14 (Stabilité de l'orthogonal d'un s.e.v. stable).

Soient $u \in \mathrm{O}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^\perp = \{y \in E;\ \forall x \in F,\ < x|y >= 0\}$ est stable par u.

démonstration : Pour $y \in F^\perp$, on a : pour tout $x \in F$, $0 =< x|y > \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} < u(x)|u(y) >$, donc $u(y)$ est orthogonal à $u(F) = F$ (d'après le lemme).

Ainsi, $u(y) \in F^\perp$. $\square$

II.2 Matrices orthogonales

Définition 8 (Matrice orthogonale).

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si $A^T A = I_n$.
On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou $\mathrm{O}(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 15 (Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.).

Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
A lors M est orthogonale si et seulement si l'application canoniquement associée u est une isométrie de E.

démonstration : Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, orthonormale de E, et u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Notons $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ les vecteurs de E correspondants canoniquement respectivements aux vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ de la matrice M.

u isométrie
ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ < e_i | e_j >= \delta_i^j$
ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ < u(e_i) | u(e_j) >= \delta_i^j$
ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ C_i^T \ \times\ C_j = (\delta_i^j) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$
ssi $M^{\mathrm{T}} M = I_n$ ssi $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
$\square$

Remarque 4. L'inverse N à droite de M est nécessairement inverse à gauche, car $MN = I_n$ et $PM = I_n$ impliquent $P = PMN = N$

Proposition 16.

Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est une matrice de changement de bases orthonormales

démonstration : c.f. caractérisation par l'image d'une b.o.n :

Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M. La base canonique $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ est une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E$.

M orthogonale $\iff u \in \mathcal{O}(E) \underset{carac}{\iff} \mathcal{B}' = u(\mathcal{B}) = (C_1 \dots, C_n)$ b.o.n. de $E \iff M$ matrice de changement de b.o.n. $\square$

Remarque 5. Si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors ses colonnes $(C_1, \dots, c_n)$ forment une base orthonormée de $M \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

H.P. : dans le cas $n = 3$ il suffit de vérifier $\|C_1\| = 1 = \|C_2\|$ et $C_1 \wedge C_2 = C_3$ ou $C_1 \wedge C_2 = -C_3$

II.3 Groupe orthogonal

Proposition 17 (Groupe Orthogonal).

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par passage à l'inverse, et stable par produit :
$\forall A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

démonstration : $I_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Pour $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a B inversible, $B^{-1} = B^T$, et $(AB^T)^T(AB^T) = BA^TAB^T = BB^T = I_n$, donc $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Proposition 18 (déterminant d'une matrice orthogonale).

Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

démonstration : $1 = \det(I_n) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$. $\square$

Définition 9.

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est appelé **groupe spécial orthogonal**, et est noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
L'ensemble des isométries de déterminant égal à 1 est appelé **groupe des isométries directes**, et est noté $\mathrm{SO}(n)$.

Proposition 19 (Groupe Spécial Orthogonal).

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par passage à l'inverse, et stable par produit :
$\forall A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ AB^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

démonstration : $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a B inversible et on a vu $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
et comme $\det(B) = 1$, on a $\det(B^-1) = 1$, donc $\det(AB^{-1}) = 1$, donc $AB^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. $\square$

II.4 Orientation d'un espace euclidien, b.o.n. directe

Définition 10.

Par convention, on choisit de dire que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée directe.
Pour toute autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

- si $\det(P) = 1$, on dit que $\mathcal{B}'$ a même orientation que $\mathcal{B}$ et est une base orthonormée directe.
- si $\det(P) = -1$, on dit que $\mathcal{B}'$ a orientation contraire à $\mathcal{B}$ et est une base orthonormée indirecte.

III. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

III.1 Groupe orthogonal du plan

Proposition 20 (Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$).

Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :

1. Soit une matrice de rotation d'angle θ, de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$.
2. Soit une matrice de réflexion, de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

démonstration : $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Comme $M^T M = I_2$, on a $\begin{cases} a^2 + b^2 & = & 1 \\ ac + bd & = & 0 \\ c^2 + d^2 & = & 1 \end{cases}$

On remarque qu'il existe $\theta, \varphi \in]-\pi, \pi]$ tels que $\begin{cases} a & = & \cos(\theta) \\ b & = & \sin(\theta) \end{cases}$ et $\begin{cases} c & = & \cos(\varphi) \\ d & = & \sin(\varphi) \end{cases}$

En effet, dans le cas $b \geq 0$, on a $a \in [-1, 1]$, et en posant $\theta = \operatorname{Arccos}(a) \in [0, \pi]$, on obtient $a = \cos\theta$ et comme $\sin\theta \geq 0$ et $1 - a^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta = b^2$, on a $0 \leq b = \sin\theta$.
Dans le cas $b < 0$ et $a \in [0, 1]$, en posant $\theta = \operatorname{Arcsin}\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, on obtient $b = \sin\theta$ et comme $\cos\theta \geq 0$ et $1 - b^2 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta = a^2$, on a $0 \leq a = \cos\theta$.
Dans le cas $b < 0$ et $a \in [-1, 0[$, comme $-b > 0$ et $-a > 0$, on sait qu'il existe $\omega \in [0, \pi/2]$ tel que $-a = \cos\omega$ et $-b = \sin\omega$. Mais alors $a = \cos(\omega - \pi)$ et $b = \sin(\omega - \pi)$; il suffit de poser $\theta = \omega - \pi \in]-\pi, -\pi/2]$.

De même pour φ.

$\begin{cases} ac + bd & = & 0 \\ ad - bc & = & \det(M) \end{cases}$, donc $\begin{cases} \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi & = & 0 \\ \cos\theta\sin\varphi - sin\theta\cos\varphi & = & \det(M) \end{cases}$, soit $\begin{cases} \cos(\varphi - \theta) & = & 0 \\ \sin(\varphi - \theta) & = & \det(M) \in \{-1, 1\} \end{cases}$

Car $\det(M)^2 = \det(M^T M) = \det(I_2) = 1$

Si $\det(M) = 1$, alors $\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Si $\det(M) = -1$, alors $\theta = \varphi - \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ □

Remarque 6. Interprétation géométrique des rootations et réflexions planes.

Proposition 21 (Détermination des matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$).

On a $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} ;\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

démonstration : corollaire direct en calculant les déterminants

Définition 11.

L'ensemble $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est appelé "groupe des rotations planes. Il est stable par produit et par passage à l'inverse.

Proposition 22 (Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$)**.**

Pour toutes matrices de rotations $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$, on a :

$$AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

démonstration : on fait le produit, et on remarque que $\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') = \cos(\theta+\theta')$, etc... $\square$.

Remarque 7. L'inverse se calcule directement !

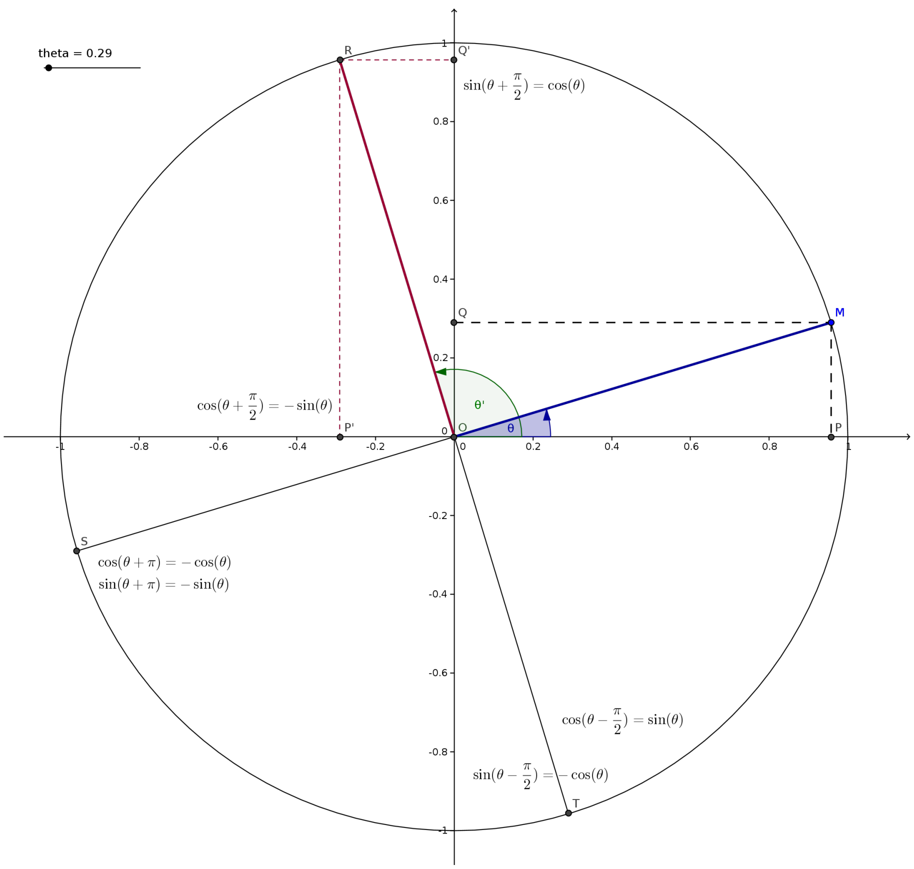
Définition 12 (Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté)**.**

On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On dit en outre que θ est une mesure (à 2π près) de l'angle de la rotation r.

Remarque 8. Lorsque l'on choisit $\theta \in [-\pi, \pi[$, il est alors uniquement déterminé, et l'on parle parfois de *mesure principale*.



Proposition 23.

Si r est la rotation plane d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, alors pour toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ du plan, on a :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dém : Soit r une rotation plane

Par définition, il existe une base orthonormée Pour $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :
$M' = Mat_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique. Posons $M = Mat_{\mathcal{B}}(r)$

Pour $P = Pass_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $P \in O_2(\mathbb{R})$ et $M = PM'P^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ $\square$

III.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Théorème 24 (Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien).

Les isométries du plan sont soit les rotations, soit les réflexions.

démonstration :
Si le déterminant vaut 1, on a une rotation d'angle θ.
Si le déterminant vaut -1, avec $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, on a :
$\chi_M = (X - \cos\theta)(X + \cos\theta) - \sin^2\theta = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
Il y a donc deux valeurs propres distinctes 1 et -1 de multiplicités respectives 1, et la matrice est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: on reconnaît la matrice d'une réflexion par rapport à la droite $F = \mathrm{Ker}(u - id_E)$.
□

Remarque 9. Dans le cas d'une réflexion, on peut déterminer explicitement F en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y & = & x \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y & = & y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\cos(\theta)-1)x - \sin(\theta)y & = & 0 \\ \sin(\theta)x + (\cos(\theta)-1)y & = & 0 \end{array} \right. \quad (S)$$

• Dans le cas $\theta = 0 \mod 2\pi$, tout vecteur convient, et on reconnaît l'identité, ce qui est impossible pour le déterminant égal à -1.
• Dans le cas $\theta = \pi \mod 2\pi$, $(S) \iff x = 0$, donc $v = (0;1)$ dirige F.
• Sinon, on a $\sin\theta \neq 0$ et $(S) \iff y = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}x$, donc $v = \left(1; \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ dirige F.

Proposition 25 (HP).

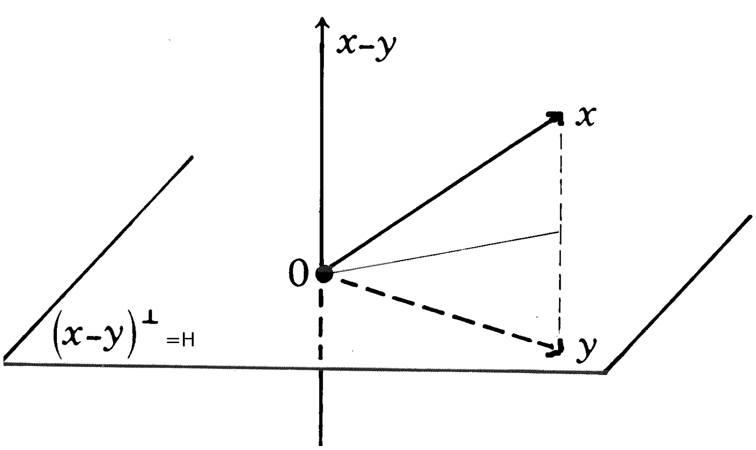
Dans le plan euclidien, la composée de deux réflexions est une rotation plane.

démonstration : il s'agit d'une isométrie, de déterminant $(-1)\times(-1) = 1$, donc d'une rotation plane.□

Définition 13 (HP).

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Pour tout sous-espace vectoriel H de dimension $n-1$ de E de dimension $n-1$, on appelle **réflexion** par rapport à H (ou d'axe la droite $H^\perp$) la symétrie s_H par rapport à F dans la direction $H^\perp$ définie par :

$$\forall h \in H, d \in H^\perp,\ s_H(h+d) = h - d$$



Dans le plan les réflexions sont les isométries de déterminant -1.

IV. Réduction des endomorphismes auto-adjoints et des matrices symétriques réelles

IV.1 Définition

Définition 14 (Endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien).

Un endomorphisme $e \in \mathcal{L}(E)$ est dit **auto-adjoint** si :

$$\forall x, y \in E,\ < u(x)|y >=< x|u(y) >$$

Notation 2. *On note $\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)\ ;\ \forall x, y \in E,\ < u(x)|y >=< x|u(y) >\}$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.*

Remarque 10. on verra la terminologie symétrique pour son écriture matriceille dans une b.o.n.

IV.2 Matrice d'un auto-adjoint dans une base orthonormée

Proposition 26.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est auto-adjoint si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

démonstration : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Notons $C_1 \ldots, C_n$ les colonnes de $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, et $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• Si u est un endomorphisme auto-adjoint, alors, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a : $< u(e_i)|e_j >=< e_i|u(e_j) >$, donc $(ME_i)^T E_j = (E_i)^T M E_j$, donc $(C_i)^T E_j = (E_i)^T C_j$, donc $m_{ji} = m_{ij}$, donc M est symétrique réelle.

• Si M est symétrique réelle, $X^T M Y = X^T M^T Y = (MX)^T Y$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc pour tous $x, y \in E$, $< u(x)|y >=< x|u(y) >$ □

variante longue : pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a : $m_{ji} = m_{ij}$ donc $(C_i)^T E_j = (E_i)^T C_j$, donc $(ME_i)^T E_j = (E_i)^T M E_j$, donc $< u(e_i)|e_j >=< e_i|u(e_j) >$.
Ainsi pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$, on a :

$$< u(x)|y > \underset{bilin.}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < u(e_i)|e_j >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i|u(e_j) > \underset{bilin.}{=} < x|u(y) >$$ *donc u est un endomorphisme auto-adjoint.*

IV.3 Réduction des endomorphismes auto-adjoints ou matrices réelles symétriques

3.a) Valeurs propres

lemme 27. Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.Alors toute valeur propre de A est réelle.

démonstration :

Pour $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $X \neq 0$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $AX = \lambda X$:

On a en conjuguant $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ car A est réelle.

Mais alors

$\lambda X^T \overline{X} = (AX)^T \overline{X} = X^T A^T \overline{X} = X^T A \overline{X} = X^T \overline{AX} = X^T \overline{\lambda X} = \overline{\lambda} X^T \overline{X}$, donc

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

□

---

lemme 28. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E euclidien. Alors toute valeur propre de u est réelle.

---

démonstration : Soit A la matrice de u dans la base canonique est symétrique réelle. □

3.b) Sous-espaces propres

---

lemme 29. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E euclidien, et F un sous-espace stable de u.

Alors $F^\perp$ est stable par u et $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme auto-adjoint de $F^\perp$.

Alors toute valeur propre de u est réelle.

---

démonstration :

• La stabilité de $F^\perp$ par u résulte du calcul, pour $y \in F^\perp$ et $x \in F$,
$< u(y)|x >=< y|u(x) >= 0$ car $u(x) \in F$, donc $u(y) \in F^\perp$.

• Pour tous $x, y \in F^\perp$ $< u(x)|y >=< x|u(y) >$, donc $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme auto-adjoint de $F^\perp$ □

3.c) Diagonalisation

Théorème 30 (Théorème spectral).

un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres. (associés à des valeurs propres réelles)

Démonstration (non exigible) : par récurrence sur $n = \dim(E)$.

• Initialisation : le cas $n = 1$ est immédiat.

• Initialisation : Supposons la propriété vraie pour tout endomorphisme auto-adjoint sur un espace euclidien de dimension n, pour $n \geq 1$ fixé.

Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$, u un endomorphisme auto-adjoint de E, λ une valeur propre (réelle) de u, et v un vecteur propre associé.

En posant $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v)$, on sait que $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$. Comme $u_{|F^{\perp}}$ est un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien $F^{\perp}$ de dimension n, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_{F^{\perp}}$ de $F^{\perp}$ formée de vecteurs propres de u.

Mais alors la famille $\mathcal{B} = (v, \mathcal{B}_{F^{\perp}})$ est une base de E, adaptée à la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$, et formée de vecteurs propres de u. □

Théorème 31 (théorème spectral, version matrices symétriques réelles).

Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que

$$P^T A P = D$$

démonstration : il s'agit de la formule de changement de base, pour P la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}'$ qui diagonalise l'endomorphisme u canoniquement associé à A. □

exemple 1. Attention, pour une matrice symétrique complexe, on ne sait rien !
$M = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, $\chi_M = (X-1)(X+1) - 1 = X^2$, et M n'est pas semblable à 0_2

IV.4 Auto-adjoints positifs

Définition 15 (Endomorphisme auto-adjoint positif).

Un **endomorphisme auto-adjoint** $u \in \mathcal{S}(E)$ est dit **positif** si :

$$\forall x \in E,\ < x|u(x) > \geq\ 0$$

Notation 3. *On note* $\mathcal{S}^+(\mathbf{E}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{E})\ ;\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E},\ < \mathbf{x}|\mathbf{u}(\mathbf{x}) > \geq \mathbf{0}$ *l'ensemble des auto-adjoints positifs de* E.

Définition 16 (Endomorphisme auto-adjoint défini positif).

Un **endomorphisme auto-adjoint** $u \in \mathcal{S}(E)$ est dit **défini positif** si :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ < x|u(x) > >\ 0$$

Notation 4. *On note* $\mathcal{S}^{++}(\mathbf{E}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{E})\ ;\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{0_E}\},\ < \mathbf{x}|\mathbf{u}(\mathbf{x}) > > \mathbf{0}\}$ *l'ensemble des auto-adjoints positifs de* E.

Proposition 32 (carcatérisation spectrale des auto-adjoints).

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.
Alors u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$.
Alors u est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+_*$.

Définition 17 (matrice symétrique positive).

Une **matrice symétrique** $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T M X \geq 0$$

Notation 5. *On note* $\mathrm{S}_{\mathbf{n}}^{+}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{M} \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R});\ \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{1}}(\mathbb{R}),\ \mathbf{X^T M X} \geq \mathbf{0}\}$ *l'ensemble des matrices symétriques positives.*

Définition 18 (matrice symétrique définie positive).

Une **matrice symétrique** $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est ditr **défnie positive** si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{n,1} \Rightarrow X^T M X > 0$$

Notation 6. *On note* $\mathrm{S}_{\mathbf{n}}^{++}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{M} \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R});\ \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{1}}(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbf{0}\},\ \mathbf{X^T M X} > \mathbf{0}\}$ *l'ensemble des matrices symétriques définies positives.*

Proposition 33 (caractérisation spectrale des matrices réelles symétriques positives).

$M \in \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+}$

démonstration : $< x|u(x) >= X^T M X$, le spectre de M matrice symétrique est celui de $u : X \mapsto MX$ aouto-adjoint

Proposition 34 (caractérisation spectrale des matrices réelles symétriques définies positives).

$M \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_*^{+}$

Remarque 11. Les matrices définies positives sont inversibles, car de déterminant non nul.

exemple 2. Si M est une matrice symétrique réelle, dont les valeurs propres sont toutes dans $]0, +\infty[$, alors $\varphi_M : (X, Y) \longmapsto X^T M Y$ définit un poduit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
etr $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

IV.5 Projecteurs orthogonaux

Définition 19.

Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal de E si et seulement si :

i) p est un projecteur
ii) $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$

Proposition 35 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux.).

Un projecteur p de E est un projecteur orthogonal si et seulement si p est auto-adjoint

démonstration : Si p auto-adjoint, alors pour $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y = p(z) \in \mathrm{Im}(p)$, on a $< x|y >=< x|p(z) >=< p(x)|z >=< 0_E|z >= 0_{\mathbb{R}}$, donc $x \perp y$ et $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$

Réciproquement, si p orthogonal, pour $x, y \in E$, on a :

$< p(x)|y >=< p(x)|(y - p(y)) + p(y) >=< p(x)|p(y) > + < p(x)|(y - p(y)) >$
$=< x|p \circ p(y) > + < x|p(y - p(y)) >=< x|p(y) >$ $\square$

NOUVEAU Programme PC 2022 :

IV.6 Endomorphismes des espaces euclidiens

Cette section vise les objectifs suivants :

— *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces préhilbertiens réels ;*
— *étudier isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*
— *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
— *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

Pour les applications courantes en dimension trois, on peut au besoin recourir au produit vectoriel, déjà introduit et connu des étudiants dans l'enseignement des sciences physiques notamment.

La notion d'adjoint est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^{\top}A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathcal{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Programme PC :

Espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces euclidiens ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les classifier en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Exemple des réflexions en dimensions deux et trois.
Groupe orthogonal. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
b) Matrices orthogonales	
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale.
Caractérisation par l'une des relations $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$. Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation d'un espace euclidien.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	Écriture complexe d'une rotation.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.	
Théorème spectral : un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.	Démonstration non exigible.
Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1}$.	