Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Limite d'une fonction

I.1 Notion de point adhérent

Définition 1.

Soit Δ une partie de E. Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ B(A, \varepsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$$

Définition 2.

Pour $D \subset E$, l'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$ ou $Adh(A)$ est définie par $\overline{D} = \{x \in E; x \texttt{ adhérent à D}\}$

$D \subset \overline{D}$.

I.2 limite d'une fonction vectorielle

Définition 3 (Limite).

Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E, et $A \in E$ un point adhérent à Δ. Une application $f : E \to F$ **admet une limite** L en A si :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall X \in \Delta,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - L\|_F \leq \varepsilon}$

Si tel est le cas on note cela $\lim\limits_{X \to A,\ X \in \Delta} f(X) = L$ ou $f(X) \xrightarrow[X \to A]{} L$

Remarque 1. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\|\ \|$ sur E en dimension finie : elles sont toutes équivalentes !

I.3 Limite séquentielle

Proposition 1.

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

démonstration : elles sont toutes équivalentes ! □

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle).

Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \in E, \ell \in F$ et $f : E \to F$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{X \to A} f(X) = \ell$
2. Pour toute suite $(X_n) \in E^n$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(X_n) = \ell$.

démonstration :

• 1) $\Rightarrow$ 2) :

Supposons 1). Pour (X_n) une suite qui converge vers A.
Soit $\varepsilon > 0$; on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall X \in D,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$
Mais comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ \|X_n - A\|_E \leq \eta$, on obtient :
$\forall n \geq N,\ \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = \ell$

• 1) $\Rightarrow$ 2) : On va démontrer la contraposée :

« NON $f(X) \xrightarrow[X\to A]{} \ell$ »$\Rightarrow$ « il existe une suite (X_n) convergente vers A telle que $(f(X_n))$ ne converge pas vers ℓ »

Supposons que $f(X)$ ne tend pas vers ℓ lorsque $X \to A$. En niant la définition de limite, on obtient l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in D;\ [\|X - A\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(X) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

En particulier, on posant $\eta = \dfrac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists X_n \in E;\ [\|X_n - A\|_E \leq \frac{1}{n} \text{ et } \|f(X_n) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

Mais alors la suite (X_n) converge vers A, alors que la suite $f(X_n)$ ne peut converger vers ℓ. $\square$.

I.4 Opérations sur les limites

Proposition 3.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b, c \in F$.
Si $f(X) \xrightarrow[X\to a]{} b$ et si $g(X) \xrightarrow[X\to a]{} c$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda\, g(X) + f(X) \xrightarrow[X\to a]{} \lambda\, c + b$$

démonstration : OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes $\square$

Proposition 4.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b \in F$, $c \in G$.
Si $f(X) \xrightarrow[X\to a]{} b$ et si $g(Y) \xrightarrow[Y\to b]{} c$, alors

$$g(f(X)) \xrightarrow[X\to a]{} c$$

démonstration : OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes $\square$

II. Continuité d'une fonction

II.1 Définition

Définition 4 (Continuité).

Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E, et $A \in E$ un point adhérent à Δ.
Une application $f : E \to F$ est dite **continue** en A si :
$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall X \in \Delta, \ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon}$

Définition 5.

Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{A} \subset E$.
Une application $f : E \to F$ est dite **continue** sur $\mathcal{A}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{A}$

exemple 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

exemple 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II.2 Continuité en dimension finie

Remarque 2. Si E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions **finies**, alors $\| \, \|_E$ est équivalente à $\| \, \|_{E,\infty}$ et $\| \, \|_F$ est équivalente à $\| \, \|_{F,\infty}$.

En particulier, il existe deux constantes $K > 0$ et $C > 0$ telles que :
$\forall x \in E, \ \|x\|_{E,\infty} \leq K\|x\|_E$ et $\forall y \in F, \ \|y\|_{F,\infty} \leq C\|y\|_F$

Donc si f de $(E, \| \, \|_E)$ vers $(F, \| \, \|_F)$ est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant η' associé à $\varepsilon' = \varepsilon/C$, on a :
si $\|X - A\|_{E,\infty} \leq \eta'/K$, alors $\|X - A\|_E \leq \eta$, donc $\|f(X) - f(A)\|_{F,\infty} \leq C\|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$
Ainsi $\|X - A\|_{E,\infty} \leq \eta'/K \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$
On en déduit que la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies

Théorème 5.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_p) \to (f_1(x_1, \ldots, x_p); \ \ldots; \ f_n(x_1, \ldots, x_p))$, et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses composantes.
Alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ses composantes le sont.

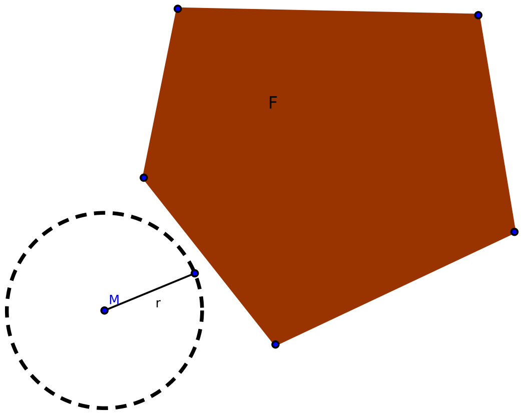
<u>démonstration :</u> le résultat est vrai pour $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie $\|y\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i|$

exemple 3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

II.3 Fermés bornées, et bornes atteintes

Définition 6.

Soit Δ une partie de E est dite **fermée** si $\forall x \notin \Delta, \ \exists \varepsilon > 0; B(x, \varepsilon) \cap \Delta = \emptyset$



Proposition 6 (critère séquentiel).

Une partie F est fermée ssi ssi toute suite $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente vérifie $\lim\limits_{n} u_n \in F$.

Remarque 3. $F \subset \overline{F}$, avec égalité ssi F est une partie fermée

Théorème 7.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur une partie fermée bornée en dimension finie y est bornée et atteint ses bornes.

II.4 Propriétés des fonctions continues

polynômes, lipschitzienne, composée, combinaisons linéaires.

Proposition 8.

Toute composée d'applications continues est continue.

Définition 7.

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite k-**lipschitzienne** si :
$\forall x, y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$.

i.e. : les images « s'éloignent »au plus d'un facteur k.

Définition 8.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel positif k telle qu'elle soit k-lipschitzienne

exemple 4. l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \operatorname{Arctan} x$, est 1-lipschitzienne, car :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x| \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left\{\dfrac{1}{1+t^2}\right\} |y-x|$, d'après l'inégalité des accroissements finis.

exemple 5. l'application $\| \quad \|_E : E \to \mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne, car $\forall x, y \in E,\ |\|y\|_E - \|x\|_E| \leq \|y-x\|_E$

Théorème 9.

Si $f : E \to F$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur E.

démonstration :
Soit $a \in E$ fixé, montrons que f est continue en a. Soit $k \geq 0$ tel que f est k-lipschitzienne. Le cas $k = 0$ est trivial. supposons $k > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, en posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, on a alors :

$$\forall x \in E, \quad \|x-a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq k\eta = \varepsilon$$

Ce qui montre la continuité de f en a $\square$.

Définition 9.

On appelle application polynomiale toute application de la forme $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{j=0}^{d}(\sum\limits_{i_1+\cdots+i_n=j} a_{i_1,\ldots,i_n})x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$.

Théorème 10.

Toute application polynomiale $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

démonstration :
Toute fonction monôme $M : (x_1, \ldots, x_n)$ est un produit de fonctions continues, donc est continue. $\square$

Proposition 11 (continuité et composantes).

$f : I \to \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si ses composantes $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ le sont.

III. Topologie dans un e.v.n.

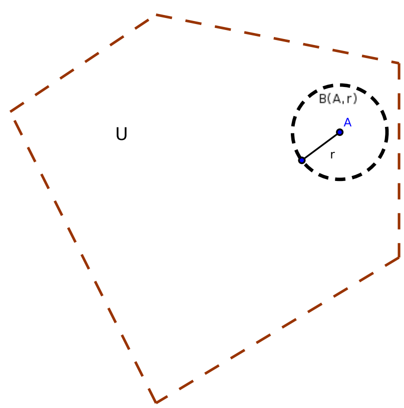
III.1 Points intérieurs, partie ouverte

Définition 10.

Soit Δ une partie de E. Un point $M \in \Delta$ est dit **point intérieur** à Δ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset \Delta$

Définition 11.

Une partie Soit Δ de E est dite **ouverte** si pour tout $X \in \Delta$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset \Delta$



Un ensemble est ouvert si tous ses points sont intérieurs (pas de "bord").

Définition 12.

Pour $A \subset E$, l'**intérieur** de A, notée A° est l'ouvert défini par $A^\circ = \{x \in E; x \texttt{ intérieur à A}\}$

Remarque 4. $A \supset A^\circ$, avec égalité ssi A est une partie ouverte

Proposition 12.

Les ouverts sont stables par réunion (finie ou dénombrable) et intersection finie

III.2 Propriétés avancées

2.a) Ouverts

Proposition 13.

L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

Application $\{x; f(x) > 0\}$ ouvert

Proposition 14.

L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Application $\{x; f(x) \geq 0\}$ fermé

exemple 6. Pour $f : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} - 2$ continue,
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{1 + x^2 + y^2} > 2\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2.b) Fermés

Proposition 15.

Une partie est fermée ssi son complémentaire F^C est ouverte.

Proposition 16.

Les fermés sont stables par réunion (finie ou dénombrable) et intersection finie.

Proposition 17.

L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

exemple 7. Pour $f : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} - 2$ continue,
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{1 + x^2 + y^2} \geq 2\} = f^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2.c) Parties denses

Définition 13.

F dense dans E si $\overline{F} = E$.

Proposition 18.

$\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

application $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par continuité du déterminant et critère séquentiel ! ! !

III.3 Parties convexes

Définition 14.

C partie convexe de E si : $\forall x, y \in F,\ [x, y] = \{(1-t)x + ty,\ t \in [0, 1]\} \subset C$.

3.a) Notions topologiques

Remarque 5. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Nouveau programme 2022

III.4 Espaces vectoriels normés (suite)

Contenus	Capacités & commentaires
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
g) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.