Méthodes à retenir :

- Une base orthonormée d'un espace de dimension n, est caractérisée par : $<\overrightarrow{e_i}|\overrightarrow{e_j}>=\delta_i^j,\ \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]$.
- Etant donnée une base orthonormée $(\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$, on a pour tous vecteurs : $<\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}>=\sum_{i=1}^{n} x_iy_j$, et $\|\overrightarrow{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Etant donnée une base orthonormée $(\overrightarrow{u_i})_{1\leq i\leq s}$ de F s.e.v. de E, le projeté orthogonal sur F de tout vecteur x est donné par la formule : $p_F(x)=\sum_{i=1}^{s}<x|u_i>u_i$
- Pour $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, P est inversible d'inverse $P^{-1}=P^T$ et les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Le théorème spectral assure non seulement la diagonalisabilité, mais également que le spectre est réel et que les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

Dans chacun des cas suivants, dites si l'expression proposée de $<x|y>$, pour tous vecteurs $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$ appartenants à $\mathbb{R}^2$ défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

a) $<x|y>=x_1+x_2+y_1+y_2$; b) $<x|y>=x_1y_2+x_2y_1$;

Exercice 2 ✰

a) Vérifier que $<\cdot|\cdot>:\ \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ définie pour tous $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En notant $\|\cdot\|$ la norme associée, calculer $\|1\|$, $\|X\|$, $\|X^2\|$.

Exercice 3 ✰

Vrai ou faux :

si P est une matrice orthogonale, alors P est inversible, et le calcul de P^{-1} ne nécessite aucun calcul (ni $+$, ni $\times$).

Exercice 4 ✰

Vrai ou faux :

si P est une matrice orthogonale, alors P^T est inversible ?

Exercice 5 ✰✰

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(k)Q(k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

II. Exercices

Exercice 6

Caractériser les endomorphismes de E espace euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans une base orthonormale directe est :

a) $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-6&2\\-6&-2&3\\2&3&6\end{pmatrix}$

b) $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&-1&-1\\-\sqrt{2}&-1&-1\end{pmatrix}$

Exercice 7 ✰✰

Dans $\mathbb{R}^3$ soit
$F = \{(x,y,z);\ x+y-z=0\}$.
Déterminer $F^\perp$ et la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 8 ✰✰ *CCINP 2017*

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & (0) & \\ 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2.
2. Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 9 ✰✰

soit a un vecteur non nul d'un espace euclidien E et H l'orthogonal de $\{a\}$, déterminer la projection orthogonale de tout vecteur x de E sur $\mathbb{K}a$ et celle sur H en fonction de x, a et de leur produit scalaire, donner la distance de x à $\mathbb{K}a$ et celle de x à H.
(on pourra s'aider d'un dessin)

Exercice 10 ✰✰

Montrer que id_E est l'unique projecteur orthogonal de E qui est un endomorphisme orthogonal de E.

Exercice 11 ✰✰

Montrer que id_E est l'unique projecteur orthogonal de E qui est un endomorphisme orthogonal de E.

Exercice 12 ✰✰ ✰ *Produit scalaire dans un e.v.e et matrices symétriques*

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $<\ \ |\ \ >$, $\|\ \ \|$ la norme associée, et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.

Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n}, (y_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer $< e_i | e_j >$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
2. Déterminer le réel $< x|y >$.
3. Déterminer la matrice 1×1 $X^T Y$.
   On notera $(X|Y) =< x|y >$ le produit scalaire correspondant sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
4. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, vérifier que $(AX|Y) = (X|AY)$.

III. Exercices avancés

Exercice 13 ✰✰✰

Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit $\alpha = \min \mathrm{Sp}(u)$, $\beta = \max \mathrm{Sp}(u)$. Montrer que $\forall x \in E,\ \alpha\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \beta\|x\|^2$.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \iff \forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$, puis que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in E\backslash\{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$.

3. On suppose que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall x \in E,\ (u(x) = 0 \iff \langle u(x), x\rangle = 0)$.

4. Soit v un autre endomorphisme symétrique de E. On suppose $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(u+v) \subset \mathbb{R}_+$.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v$.
c) Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$.

Exercice 14 ✰✰

Soit $\theta \in [0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$ et
$$M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que M_θ est la matrice d'une isométrie f_θ de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que f_θ possède une unique valeur propre réelle. On note D le sous-espace propre associé.
3. A l'aide de la matrice M_θ, justifier que D et $D^\perp$ sont stables par f_θ.
4. Préciser la nature de la restriction g_θ de f_θ à $D^\perp$.

Exercice 15 ✰✰

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, justifier que $N(V) = V^T\overline{V}$ est une matrice 1×1 contenant un réel positif.
2. En calculant de deux manières $N(AV) = (AV)^T\overline{AV}$, pour V vecteur propre de A associé à une valeur propre λ, montrer que $|\lambda|^2 = 1$.
3. En déduire que toute valeur propre de Aest de module 1.
4. Que dire des valeurs propres réelles de A ?

Exercice 16 ✰✰

Soit $N \in \mathbb{N}$. Dans l'espace vectoriel préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$, pour le produit scalaire usuel, justifier que la famille $(t \longmapsto \cos(nt))_{0\le n\le N}$ est une famille orthogonale. Est-elle orthonormale ?

Exercice 17 ✰✰✰ *TPE EIVP*

Soit dans un e.v.eu. f telle que :

$f(0) = 0$ et pour tout couple de vecteurs x, y $\|f(x) - f(y)\| = \|x-y\|$

1/ Montrer que f conserve la norme.

2/ Montrer que f conserve le produit scalaire.

3/ Montrer que f est linéaire.

4/ Que peut-on conclure sur f ?

Exercice 18 ✰✰✰ *MT*

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$. On note $[a]$ la colonne des coordonnées du vecteur a dans la base $\mathcal{B}$. Soit $a \in E$, différent du vecteur nul.a) Montrer que $M = \dfrac{1}{{}^t[a][a]}[a]\,{}^t[a]$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(a)$. b) Écrire en fonction de M la matrice de : i) la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(a)$;

ii) la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$; iii) le projecteur orthogonal par rapport à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$.

Exercice 19 ✰✰✰

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle , $(\lambda_\ell)_{1\le\ell\le s}$ ses s valeurs propres réelles distinctes, et $(d_\ell)_{1\le\ell\le s}$ les dimensions des sous-espaces-propres correspondants. Prouver que :

$$\mathrm{Tr}(S^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2 = \sum_{\ell=1}^{s} d_\ell\lambda_\ell^2$$

Exercice 20 ✰✰✰✰

Soit $E = \mathbb{R}_N[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N ;

1. Démontrer que $(P;Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$;

2. On note $P_n = X^n(1-X)^n$ et $L_n(X) = [P_n]^{(n)}$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de P_n).

Pour $0 \le i \le j$ montrer que :

$< L_i|L_j >= (-1)^i \displaystyle\int_0^1 P_i P_j^{(j+i)}$.

3. Calculer $< L_n|L_n >$.

4.En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21 ✰✰

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace vectoriel E , démontrer que :

$p \circ q = 0 \Leftrightarrow q \circ p = 0$.

Exercice 22 *Matrices définies positives*

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$.

1. Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique réelle et positive telle que $R^2 = U$.
2. Notons u et r les endomorphismes canoniquement associés à U et R.
   (a) Justifier que u et r commutent.
   (b) Pour $\lambda \in Sp(u)$, $E_{\lambda,u}$ désigne le s.e.p. de u associé à λ. Justifier que pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $E_{\lambda,u}$ est stable par r.
   (c) Montrer que pour tout $\lambda \in Sp(u)$, la restriction $r_{E_{\lambda,u}}$ de r à $E_{\lambda,u}$ est diagonalisable dans une base de vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{\lambda}$.
   (d) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition
   $$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_{\lambda,u}$$
   dans laquelle les matrices de u et r sont diagonales.
   (e) Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$.
   Justifier que $P^{-1}UP$ et $P^{-1}RP$ sont diagonale.
   (f) En déduire qu'il existe une unique matrice R vérifiant $R^2 = U$.

Exercice 23 ✰✰

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Étudier les cas d'égalités.

Exercice 24 ✰✰

Dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soient A et B deux matrices symétriques réelles, tels que $AB = BA$. Montrer que A et B sont diagonalisables dans une base orthonormée commune de vecteurs propres.

Exercice 25 ✰✰✰ *Centrale PC 2019*

En utilisant que dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,
$\theta : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire, prouver que pour toutes matrices symétriques A, B on a :
$(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \operatorname{tr}(A^2). \operatorname{tr}(B^2)$.

Exercice 26 ✰✰

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Étant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_A(x) = X^TAX$, où X désigne le vecteur colonne canoniquement associé à x.

1. Montrer que la fonction $L(f_A) : p \mapsto \max\{(p|x) - f_A(x)\,;\, x \in \mathbb{R}^n\}$ est bien définie.

2. Montrer que la fonction $L(f_A)$ est de la forme f_B pour une matrice B à préciser.

Exercice 27 ✰✰

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 28 ✰✰✰ *Mines-Ponts MP 2022*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Vérifier que : $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tUU$.

2) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation ${}^tMAM = B$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, admet une solution si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Notes

[3] correction : vrai, il suffit de transposer

[6] correction : -1 vp simple $[-2,-3,1]$; 1 vp double $([-3,2,0],[1,0,2])$