I. Applications directes du cours

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et on note d la distance associée.

Montrer que la boule $B(A,r) = \{M \in E; d(A,M) < r\}$ est une partie ouverte de E, pour $A \in E$ et $r > 0$.

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et on note d la distance associée.

Montrer que la boule $B(A,r) = \{M \in E; d(A,M) < r\}$ est convexe pour $A \in E$ et $r > 0$.

II. Exercices

Exercice 3

Donner le domaine de continuité le plus grand possible de la fonction :
$f : (x,y) \mapsto y\sqrt{1-x^2}$

Exercice 4

Étudier la continuité en (0,0) de la fonction
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On pourra condidérer $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,-t)$

Exercice 5

Étudier la continuité en (0,0) de la fonction
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\cos\left(\dfrac{1}{xy}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & {\scriptstyle \text{si}}\ (x,y) = {\scriptstyle \text{ si}}\ x = 0 {\scriptstyle \text{ ou }} y = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 ☆☆

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 ☆☆

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 1 + y\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 ☆☆☆ *Fermé*

Justifier que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R});\ \det(M) = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

III. Exercices avancés

Exercice 9 ☆☆

Soient F une partie fermée non vide d'un espace normé E et $x \in E$.

On note $d(x,F) = \inf\{\|x-y\|,\ y \in F\}$

1. si $x \in F$, justifier que $d(x,F) = 0$
2. Supposons que $d(x,F) = 0$
   (a) justifier l'existence d'une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$
   (b) Montrer que la suite y_n est convergente, vers une limite que l'on précisera.
   (c) En utilisant le fait que F est une partie fermée, montrer que $x \in F$.
3. En déduire que
   $$d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

Exercice 10 ☆☆☆☆

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

1. (a) Soient $a \in \bar{A}$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim a_n = a$, et $b \in \bar{A}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim b_n = b$
   Montrer que pour tout scalaire $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a + (1-\lambda)b \in \bar{A}$
   (b) En déduire que $\bar{A}$ est convexe.
2. (a) Soient $a, b \in A^\circ$, et $r_a, r_b > 0$ tels que $B(a, r_a) \subset A$ et $B(b, r_b) \subset A$.
   En notant $r = \min(r_a, r_b)$, justifier que pour tout $x \in B(\lambda a + (1-\lambda)b, r)$, il existe $u \in B(0,1)$ tel que :
   $$x = \lambda a + (1-\lambda)b + ru$$
   (b) En remarquant que $a' = a + ru \in A$ et que $b' = b + ru \in A$, justifier que le segment $[a', b'] = \{ta' + (1-t)b'; t \in [0,1]\}$ est contenu dans A.
   (c) En déduire que $x \in A$
   (d) En déduire que $B(\lambda a + (1-\lambda)b, r) \subset A$
   (e) La partie A° est-elle convexe ?

Exercice 11 ☆☆ *fonctions höldériennes*

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\|\ \|$ une norme sur E. Soit $h : E \to E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :
$\forall (x,y) \in E^2,\ \|h(x) - h(y)\| \leq \|x-y\|^\alpha$. Montrer que h est continue sur E.

Exercice 12 ☆☆☆

Soient E un $\mathbb{R}$-e. v. n., a et b deux vecteurs non nuls de E, et pour tout t réel, $f(t) = \|at+b\|$;

a) prouver que f est continue et lipschitzienne ;

b) prouver que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$;

c) Prouver que l'ensemble des réels t tels que $at+b$ appartienne à la boule unité ouverte est soit vide soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 13 ☆☆☆, *pour les 5/2 : CCINP PC 2018*

On étudie

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}\right\}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x,y) \in E$.
2. Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Notes

[2] correction :

[5] correction : $x_n = y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ donne $f(x_n, y_n) = 0$.

$x_n = y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2(n\pi + \pi/2)}}$ donne $f(x_n, y_n) = 1$.