

Méthodes à retenir :

- Une base orthonormée d'un espace de dimension n , est caractérisée par : $\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \delta_i^j, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Etant donnée une base orthonormée $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a pour tous vecteurs : $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, et $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Etant donnée une base orthonormée $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq s}$ de F s.e.v. de E , le projeté orthogonal sur F de tout vecteur x est donné par la formule : $p_F(x) = \sum_{i=1}^s \langle x | u_i \rangle u_i$
- Pour $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, P est inversible d'inverse $P^{-1} = P^T$ et les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Le théorème spectral assure non seulement la diagonalisabilité, mais également que le spectre est réel et que les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Dans chacun des cas suivants, dites si l'expression proposée de $\langle x | y \rangle$, pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ appartenants à \mathbb{R}^2 définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 :

a) $\langle x | y \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$; b) $\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$;

Exercice 2 ☆

a) Vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$ par $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En notant $\|\cdot\|$ la norme associée, calculer $\|1\|, \|X\|, \|X^2\|$.

Exercice 3 ☆

Vrai ou faux :
si P est une matrice orthogonale, alors P est inversible, et le calcul de P^{-1} ne nécessite aucun calcul (ni +, ni \times).

Exercice 4 ☆

Vrai ou faux :
si P est une matrice orthogonale, alors P^T est inversible ?

Exercice 5 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

II. Exercices

Exercice 6

Caractériser les endomorphismes de E espace euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans une base orthonormale directe est :

a) $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 ☆☆

Dans \mathbb{R}^3 soit

$$F = \{(x, y, z); x - y = 0\}.$$

Déterminer F^\perp et la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

Exercice 8 ☆☆ CCINP 2017

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & (0) & \\ 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

- Calculer M^2 .
- Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 9 ☆☆

soit a un vecteur non nul d'un espace euclidien E et H l'orthogonal de $\{a\}$, déterminer la projection orthogonale de tout vecteur x de E sur $\mathbb{K}a$ et celle sur H en fonction de x , a et de leur produit scalaire, donner la distance de x à $\mathbb{K}a$ et celle de x à H .

(on pourra s'aider d'un dessin)

Exercice 10 ☆☆

Montrer que id_E est l'unique projecteur orthogonal de E qui est un endomorphisme orthogonal de E .

Exercice 11 ☆☆

Montrer que id_E est l'unique projecteur orthogonal de E qui est un endomorphisme orthogonal de E .

Exercice 12 ☆☆

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- La suite de matrices $(M^n)_n$ converge t-elle ?
- Soit $N = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$. Que représente N ?
- Déterminer N .
- Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ telles que pour tout naturel n $X_{n+1} = MX_n$. La suite $(X_n)_n$ converge t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 13 ☆☆☆ *Produit scalaire dans un e.v.e et matrices symétriques*

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ la norme associée, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(y_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n y_j e_j, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Calculer $\langle e_i | e_j \rangle$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
- Déterminer le réel $\langle x | y \rangle$.
- Déterminer la matrice 1×1 $X^T Y$.
On notera $(X|Y) = \langle x | y \rangle$ le produit scalaire correspondant sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, vérifier que $(AX|Y) = (X|AY)$.

III. Exercices avancés

Exercice 14 ★★

Soit $\theta \in [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ et

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- Justifier que M_θ est la matrice d'une isométrie f_θ de \mathbb{R}^3 .
- Démontrer que f_θ possède une unique valeur propre réelle. On note D le sous-espace propre associé.
- A l'aide de la matrice M_θ , justifier que D et D^\perp sont stables par f_θ .
- Préciser la nature de la restriction g_θ de f_θ à D^\perp .

Exercice 15 ★★

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

- Pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, justifier que $N(V) = V^T \overline{V}$ est une matrice 1×1 contenant un réel positif.
- En calculant de deux manières $N(AV) = (AV)^T \overline{AV}$, pour V vecteur propre de A associé à une valeur propre λ , montrer que $|\lambda|^2 = 1$.
- En déduire que toute valeur propre de A est de module 1.
- Que dire des valeurs propres réelles de A ?

Exercice 16 ★★

Soit $N \in \mathbb{N}$. Dans l'espace vectoriel préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, pour le produit scalaire usuel, justifier que la famille $(t \mapsto \cos(nt))_{0 \leq n \leq N}$ est une famille orthogonale. Est-elle orthonormale?

Exercice 17 ★★★

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, $(\lambda_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}$ ses s valeurs propres réelles distinctes, et $(d_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}$ les dimensions des sous-espaces-propres correspondants. Prouver que :

$$\text{Tr}(S^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}^2 = \sum_{\ell=1}^s d_\ell \lambda_\ell^2$$

Exercice 18 ★★★★★

Soit $E = \mathbb{R}_N[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N ;

- Démontrer que $(P; Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$;
- On note $P_n = X^n(1 - X)^n$ et $L_n(X) = [P_n]^{(n)}$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de P_n).
Pour $0 \leq i \leq j$ montrer que :
 $\langle L_i | L_j \rangle = (-1)^i \int_0^1 P_i P_j^{(j+i)}$.
- Calculer $\langle L_n | L_n \rangle$.
- En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19 ★★★

Soit n un entier strictement positif, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E , A une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

On étudie la fonction f de E dans \mathbb{R} qui à tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $f(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle - 2 \langle x, u \rangle$.

- Ici $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$. Montrer que $X_0 = (2, 1)$ est un point critique de f .

- Avec les conditions de la question 1 : soit $h = (h_1, h_2)$. Montrer que $f(X_0 + h) - f(X_0) = ah_1^2 + bh_2^2 + ch_1h_2$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que f admet un extremum en X_0 .
- On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E , $\langle x, \varphi(x) \rangle > 0$. Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ , montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

Exercice 20 ★★

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace vectoriel E , démontrer que :

$$p \circ q = 0 \Leftrightarrow q \circ p = 0.$$

Exercice 21 Matrices définies positives

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$.

1. Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique réelle et positive telle que $R^2 = U$.
2. Notons u et r les endomorphismes canoniquement associés à U et R .
 - (a) Justifier que u et r commutent.
 - (b) Pour $\lambda \in Sp(u)$, $E_{\lambda,u}$ désigne le s.e.p. de u associé à λ . Justifier que pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $E_{\lambda,u}$ est stable par r .
 - (c) Montrer que pour tout $\lambda \in Sp(u)$, la restriction $r_{E_{\lambda,u}}$ de r à $E_{\lambda,u}$ est diagonalisable dans une base de vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{\lambda}$.
 - (d) En déduire qu'il existe une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^n adaptée à la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_{\lambda,u}$$

dans laquelle les matrices de u et r sont diagonales.

- (e) Soit P la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B}' . Justifier que $P^{-1}UP$ et $P^{-1}RP$ sont diagonales.
- (f) En déduire qu'il existe une unique matrice R vérifiant $R^2 = U$.

Exercice 22 ☆☆☆

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Étudier les cas d'égalités.

Exercice 23 ☆☆☆

Dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soient A et B deux matrices symétriques réelles, tels que $AB = BA$. Montrer que A et B sont diagonalisables dans une base orthonormée commune de vecteurs propres.

Exercice 24 ☆☆☆ Centrale PC 2019

En utilisant que dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$\theta : (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire, prouver que pour toutes matrices symétriques A, B on a : $(\text{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \text{tr}(A^2) \cdot \text{tr}(B^2)$.

Exercice 25 ☆☆☆

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Étant donné un vecteur x de \mathbb{R}^n , on pose $f_A(x) = X^TAX$, où X désigne le vecteur colonne canoniquement associé à x .

1. Montrer que la fonction $L(f_A) : p \mapsto \max\{p|x) - f_A(x) ; x \in \mathbb{R}^n\}$ est bien définie.

2. Montrer que la fonction $L(f_A)$ est de la forme f_B pour une matrice B à préciser.

Exercice 26 ☆☆☆

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 27 ☆☆☆ Mines-Ponts MP 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Vérifier que : $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = {}^tUU$.

2) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation ${}^tMAM = B$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, admet une solution si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Notes

³ correction : vrai, il suffit de transposer

⁶ correction : -1 vp simple $[-2, -3, 1]$; 1 vp double $([-3, 2, 0], [1, 0, 2])$