

Table des matières

I. Théorème de Continuité	2
II. Théorème de convergence dominée à paramètre continu	3
III. Dérivabilité	4
IV. Intégrales à paramètre	8

Pré-requis

Objectifs

Premiers exemples

exemple 1 (Transformée de Fourier).

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt, \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

\hat{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , on dominant par $\varphi : t \mapsto |f(t)|$

Par IPP $\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$

exemple 2 (Transformée de Laplace).

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).$$

I. Théorème de Continuité

Théorème 1 (de continuité d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux intervalles de \mathbb{R} , et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ telle que :

- i) pour tout $x \in A$, $f_{x, \bullet} : I \rightarrow \mathbb{K}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
(f cont. p. morc. % à t)
- ii) pour tout $t \in I$, $f_{\bullet, t} : I \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ; (f continue % à x)
- iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse de domination de $f(x, \bullet)$ par une fonction intégrable % à t)

Alors la fonction $g : A \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Remarque 1. ii) et iii) assurent l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$, pour tout $x \in A$ fixé.

démonstration : (non exigible)

idée : pour (x_n) une suite réelle qui converge vers $x \in I$ fixé, on introduit la suite de fonctions (u_n) définie par :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : t \mapsto f(x_n, t)$.

La suite (u_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I et intégrables, qui converge simplement vers $u : t \mapsto f(x, t)$, et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |u_n(t)| \leq \varphi(t)$, donc d'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I u_n(t) dt = \int_I u(t) dt$, i.e. $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$. \square

Généralisation : domination locale compacte :

Lorsque l'hypothèse de domination de f est vérifiée sur toute partie de la forme $K \times I$ avec K segment de A , par une fonction φ_K , la conclusion reste vraie : g est alors continue sur tout segment K de A , donc sur A .

on peut remplacer iii) par l'hypothèse moins forte iii') :

iii') Pour tout segment $K = [u, v]$ de A , il existe une fonction $\varphi_K : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que : pour tout $(x, t) \in [u, v] \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

(hypothèse de domination sur tout segment K de A de $f(x, \bullet)$ par une fonction intégrable % t)

exemple 3. $g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x+(t^2+1)}(2+\cos(t))} dt$

est continue.

Il suffit de considérer $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

exemple 4. $\Gamma :]0, +\infty[, x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Est continue, par domination pour $x \in [a, b]$ par $\varphi : t \mapsto \max(t^{a-1}e^{-t}, t^{b-1}e^{-t})$ continue positive intégrable.

II. Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Théorème 2 (de convergence dominée à paramètre continu).

Soient A et I deux intervalles de \mathbb{R} , a une borne de A , et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ telle que :

- i) Pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$
- ii) Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I
- iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$.

Remarque 2. On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

exemple 5. $h : [0, +\infty[\times]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{t^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0$$

Domination : $\left| \frac{e^{-xt}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ qui ne dépend pas de x .

$$\text{On obtient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} h(x, t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt = 0$$

III. Dérivabilité

Théorème 3 (de dérivation d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux intervalles de \mathbb{R} , et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$ la fonction $f_{x,\bullet} : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux intégrable sur I ;

$$t \mapsto f(x, t)$$

ii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;

iii) pour tout $x \in A$ la fonction $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,\bullet} : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I ;

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$$

iv) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\text{pour tout } (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

(hypothèse de domination de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \bullet)$ par une fonction intégrable % t)

Alors la fonction $g : A \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et pour tout $x \in A$ on a

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Remarque 3. iii) et iv) assurent l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, pour tout $x \in A$ fixé.

démonstration : (non exigible)

$$\text{Soient } a \in A, T : x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt & \text{si } x = a \end{cases}$$

On va montrer que T est continue en a .

pour (x_n) une suite réelle qui converge vers $a \in A$ fixé sans jamais l'atteindre, on a par linéarité :

$$T(x_n) = \int_I h_n(t) dt, \text{ où } h_n : t \mapsto \frac{f(x_n, t) - f(a, t)}{x_n - a}$$

La suite (h_n) est une suite de fonction continues par morceaux, elle converge simplement vers $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ (par définition des dérivées partielles).

Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \eta, a + \eta]$, $|h_n(t)| \leq \|x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\|_{\infty, [a-\eta, a+\eta]} \leq 2 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) \right| + e^{-t^2} = \varphi(t)$, par inégalité des accroissements finis et continuité de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$.

mais alors, d'après le TCD, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I h_n(t) dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$, i.e. $T(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T(a)$. \square

Généralisation : domination locale compacte :

Lorsque l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie de la forme $K \times I$ avec K segment de I , par une fonction φ_K , la conclusion reste vraie !

Théorème 4 (de dérivations successives d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux intervalles de \mathbb{R} , k un entier naturel, et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$ la fonction $f_{x, \bullet} : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux intégrable
 $t \mapsto f(x, t)$
 sur I ;

ii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur A ;

iii) pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et tout $x \in A$ la fonction $\left(\frac{\partial^i f}{\partial x^i}\right)_{x, \bullet} : I \rightarrow \mathbb{K}$ est
 $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$
continue par morceaux sur I ;

iv) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\text{pour tout } (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

(hypothèse de domination de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \bullet)$ par une fonction intégrable % t)

Alors la fonction $g : A \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur A et pour tout $x \in A$ on a

$$g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket.$$

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. \square

NOUVEAU Programme PC 2022 :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

Théorème de continuité :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :
si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} , a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

CONTENUS

Théorème de dérivation :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe \mathcal{C}^k d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ pour $0 \leq j < k$.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

La démonstration n'est pas exigible.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Programme PC :

IV. Intégrales à paramètre

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Intégrales à paramètre

Théorème de continuité :

Si I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Théorème de dérivation : Si I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on a sur I :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Démonstration non exigible.

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I .

Démonstration non exigible.

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I .

\Leftrightarrow PC : transformée de Fourier.