Table des matières

Pré-requis

Objectifs

Premiers exemples

exemple 1 (Transformée de Fourier).

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathbf{i}\xi t}\ \mathrm{d}t, \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

$\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on dominant par $\varphi : t \mapsto |f(t)|$
Par IPP $\hat{f}'(\xi) = \mathbf{i}\xi\hat{f}(\xi)$

exemple 2 (Transformée de Laplace).

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t, \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}).$$

I. Théorème de Continuité

Théorème 1 (de continuité d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$, $f_{x,\bullet} : I \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux** sur I ;
(f cont. p. morc. % à t)

ii) pour tout $t \in I$, $f_{\bullet,t} : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur A ; (f continue % à x)

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \le \varphi(t)$$

(hypothèse de domination de $f(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % à t)

Alors la fonction $\boxed{g : A \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est continue sur } A.}$

Remarque 1. ii) et iii) assurent l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$, pour tout $x \in A$ fixé.

démonstration : (non exigible)
idée : pour (x_n) une suite réelle qui converge vers $x \in I$ fixé, on introduit la suite de fonctions (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : t \mapsto f(x_n,t)$.

La suite (u_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I et intégrables, qui converge simplement vers $u : t \mapsto f(x,t)$, et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |u_n(t)| \le \varphi(t)$, donc d'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I u_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_I u(t)\ \mathrm{d}t$, i.e. $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$. $\square$

Généralisation : domination locale compacte :
Lorsque l'hypothèse de domination de f est vérifiée sur toute partie de la forme $K \times I$ avec K segment de A, par une fonction φ_K, la conclusion reste vraie : g est alors continue sur tout segment K de A, donc sur A.

on peut remplacer iii) par l'hypothèse moins forte iii') :
iii')Pour tout segment $K = [u,v]$ de A, il existe une fonction $\varphi_K : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur I telle que : pour tout $(x,t) \in [u,v] \times I$, $|f(x,t)| \le \varphi(t)$.
(hypothèse de domination sur tout segment K de A de $f(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % t)

exemple 3. $g :]-1,+\infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+(t^2+1)(2+\cos(t))}\mathrm{d}t$

est continue.

Il suffit de considérer $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

exemple 4. $\Gamma :]0,+\infty[,\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$

Est continue, par domination pour $x \in [a,b]$ par $\varphi : t \mapsto \max(t^{a-1}e^{-t}, t^{b-1}e^{-t})$ continue positive intégrable.

II. Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Théorème 2 (de convergence dominée à paramètre continu).

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, a une borne de A, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) Pour tout $t \in I,\ f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$

ii) Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\boxed{\displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\ \mathrm{d}t.}$

Remarque 2. On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

exemple 5. $h : [0,+\infty[\times[1,+\infty[\to \mathbb{R};\ (x,t) \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x,t) = 0$

Domination : $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ qui ne dépend pas de x.

On obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} h(x,t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} 0\ \mathrm{d}t = 0$

III. Dérivabilité

Théorème 3 (de dérivation d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \to \mathbb{K},\ (x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$ la fonction $f_{x,\bullet} : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** **intégrable** sur I ;

ii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;

iii) pour tout $x \in A$ la fonction $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,\bullet} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** sur I ;

iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **positive** , **continue par morceaux** et **intégrable** sur I telle que :
pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.
(hypothèse de domination de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % t)

Alors la fonction $\boxed{g : A \to \mathbb{K},\ x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } A}$ et pour tout $x \in A$ on a $\boxed{g'(x) = \int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t}$.

Remarque 3. iii) et iv) assurent l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, pour tout $x \in A$ fixé.

démonstration : (non exigible)

Soient $a \in A$, $T : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a \\ \displaystyle\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ si } x = a \end{cases}$

On va montrer que T est continue en a.
pour (x_n) une suite réelle qui converge vers $a \in A$ fixé sans jamais l'atteindre, on a par linéarité :
$T(x_n) = \int_I h_n(t)\ \mathrm{d}t$, où $h_n : t \mapsto \dfrac{f(x_n,t) - f(a,t)}{x_n - a}$

La suite (h_n) est une suite de fonction continues par morceaux, elle converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ (par définition des dérivées partielles).

Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\eta, a+\eta]$, $|h_n(t)| \leq \ \|x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\|_{\infty,[a-\eta,a+\eta]} \leq 2\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)\right| + e^{-t^2} = \varphi(t)$, par inégalité des accroissements finis et continuité de $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

mais alors, d'après le TCD, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I h_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$, i.e. $T(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(a)$. $\square$

Généralisation : domination locale compacte :
Lorsque l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie de la forme $K \times I$ avec K segment de I, par une fonction φ_K, la conclusion reste vraie !

Théorème 4 (de dérivations successives d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, k un entier naturel, et $f : A \times I \to \mathbb{K}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$ la fonction $f_{x,\bullet} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** **intégrable** sur I ;

ii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;

iii) pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et tout $x \in A$ la fonction $\left(\frac{\partial^i f}{\partial x^i}\right)_{x,\bullet} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** sur I ;

iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **positive** , **continue par morceaux** et **intégrable** sur I telle que :
pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.
(hypothèse de domination de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % t)

Alors la fonction $\boxed{g : A \to \mathbb{K},\ x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } A}$ et pour tout $x \in A$ on a $\boxed{g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\ \mathrm{d}t}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. $\square$

NOUVEAU Programme PC 2022 :

Contenus	Capacités & commentaires

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de continuité :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

— pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
— pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
— il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

— pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$;
— pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
— il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x,t)\,dt \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\,dt.$$

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : — pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ; — pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ; — pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; — il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.	
	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Programme PC :

IV. Intégrales à paramètre

Contenus	Capacités & commentaires

Intégrales à paramètre

Théorème de continuité :
Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\underset{\cdot}{t}$ est continue sur I.

Démonstration non exigible.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.

Théorème de dérivation : Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\underset{\cdot}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a sur I :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\underset{\cdot}{t}.$$

Démonstration non exigible.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.
$\leftrightarrows$ PC : transformée de Fourier.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.